نسخة أولية

# غلاف الحقيبة

## يتم إدراجه لاحقاً من قبل الإدارة العامة للمناهج

## مقدمة

الحمد لله الذي علَّم بالقلم، علَّم الإنسان ما لم يعلم، والصلاة والسلام على من بُعث مُعلماً للناس وهادياً وبشيراً، وداعياً إلى الله بإذنه وسراجاً منيراً؛ فأخرج الناس من ظلمات الجهل والغواية، إلى نور العلم والهداية، نبينا ومعلمنا وقدوتنا الأول محمد بن عبدالله وعلى آله وصحبه أجمعين، أما بعد:

تسعى المؤسسة العامة للتدريب التقني والمهني لتأهيل الكوادر الوطنية المدربة القادرة على شغل الوظائف التقنية والفنية والمهنية المتوفرة في سوق العمل السعودي، ويأتي هذا الاهتمام نتيجة للتوجهات السديدة من لدن قادة هذا الوطن التي تصب في مجملها نحو إيجاد وطن متكامل يعتمد ذاتياً على الله ثم على موارده وعلى قوة شبابه المسلح بالعلم والإيمان من أجل الاستمرار قدماً في دفع عجلة التقدم التنموي، لتصل بعون الله تعالى لمصاف الدول المتقدمة صناعياً.

وقد خطت الإدارة العامة للمناهج خطوة إيجابية تتفق مع التجارب الدولية المتقدمة في بناء البرامج التدريبية، وفق أساليب علمية حديثة تحاكي متطلبات سوق العمل بكافة تخصصاته لتلبي تلك المتطلبات، وقد تمثلت هذه الخطوة في مشروع إعداد المعايير المهنية الوطنية ومن بعده مشروع المؤهلات المهنية الوطنية، والذي يمثل كل منهما في زمنه، الركيزة الأساسية في بناء البرامج التدريبية، إذ تعتمد المعايير وكذلك المؤهلات لاحقاً في بنائها على تشكيل لجان تخصصية تمثل سوق العمل والمؤسسة العامة للتدريب التقني والمهني بحيث تتوافق الرؤية العلمية مع الواقع العملي الذي تفرضه متطلبات سوق العمل، لتخرج هذه اللجان في النهاية بنظرة متكاملة لبرنامج تدريبي أكثر التصاقاً بسوق العمل، وأكثر واقعية في تحقيق متطلباته الأساسية.

وتتناول هذه الحقيبة التدريبية "رياضيات عامة (101رياض)" لمتدربي الكليات التقنية موضوعات حيوية تتناول كيفية اكتساب المهارات اللازمة لهذا البرنامج لتكون مهاراتها رافداً لهم في حياتهم العملية بعد تخرجهم من هذا البرنامج. والإدارة العامة للمناهج وهي تضع بين يديك هذه الحقيبة التدريبية تأمل من الله عز وجلّ أن تسهم بشكل مباشر في تأصيل المهارات الضرورية اللازمة، بأسلوب مبسط خالٍ من التعقيد.

والله نسأل أن يوفق القائمين على إعدادها والمستفيدين منها لما يحبه ويرضاه؛ إنه سميع مجيب الدعاء.

الإدارة العامة للمناهج

# الفهـــرس

## تمهيد

الهدف العام من الحقيبة:
تهدف هذه الحقيبة إلى إكساب المتدرب المعارف والمهارات التأسيسية في عدد من المواضيع الرياضية التي تؤهله لفهم المقررات التخصصية.

تعريف بالحقيبة:
تقدم هذه الحقيبة وثيقة أساسية موجهة لمتدرب الكلية التقنية لتعليمه المهارات الأساسية لعدد من المواضيع الرياضية التي تؤهله لفهم المقررات التخصصية . ولقد ارتئينا -خدمة للأهداف التربوية - إعطاء بعض التفاصيل للنتائج الأساسية والتي يحتاج إليها المتدرب في التطبيقات المباشرة دون التعمق في المسائل النظرية حرصاً منا على إيصال المعلومة واضحة للمتدرب ، مع الحرص على الإكثار من حل الامثلة المباشرة التي يمكن أن يتعرض لها المتدرب في مواد التخصص ليتسنى له فهمها بوضوح .

**الوقت المتوقع لإتمام التدريب على مهارات هذه الحقيبة التدريبية:**
يتم التدريب على مهارات هذه الحقيبة في 60 ساعة تدريبية، موزعة كالتالي:

| | | |
|---|---|---|
| **الوحدة الأولى :** | المجموعات | 8 ساعات تدريبية |
| **الوحدة الثانية :** | العمليات الحسابية على الأعداد النسبية والحقيقية | 8 ساعة تدريبية |
| **الوحدة الثالثة :** | كثيرات الحدود | 12 ساعات تدريبية |
| **الوحدة الرابعة :** | المصفوفات والمحددات | 12 ساعات تدريبية |
| **الوحدة الخامسة:** | المعادلات | 12 ساعات تدريبية |
| **الوحدة السادسة:** | الهندسة المستوية والفراغية | 8 ساعات تدريبية |

الأهداف التفصيلية للحقيبة:

من المتوقع في نهاية هذه الحقيبة التدريبية أن يكون المتدرب قادراً وبكفاءة على أن:
1. الالمام بمفهوم المجموعات وخصائصها والعمليات عليها.
2. يميز بين المجموعات العددية والقدرة على اجراء العمليات الحسابية عليها.
3. الالمام بمفهوم كثيرات الحدود والقدرة على تبسيطها وتحليلها واختصار الكسور الجبرية.
4. التعامل مع المصفوفات والمحددات والمقدرة على استعمالها.
5. القدرة على حل المعادلات من الدرجة الأولى والثانية ومجموعة المعادلات الخطية ذات مجهولين أو ثلاثة.
6. الالمام بكيفية حساب المساحات والمحيطات والاحجام لأشكال هندسية مستوية وفارغة

# الوحدة الأولى

## المجموعات

# الوحدة الأولى
# المجموعات

الهدف العام للوحدة:
تهدف هذه الوحدة إلى معرفة مفهوم المجموعات والعمليات عليها والمجموعات العددية المشهورة والقيام بالعمليات الحسابية في مجموعة الاعداد الحقيقية.

الأهداف التفصيلية:
**من المتوقع في نهاية هذه الوحدة التدريبية أن يكون المتدرب قادراً وبكفاءة على أن:**
1. يُعَرّف المجموعة .
2. يميز خصائص المجموعات .
3. يحسب العمليات على المجموعات.
4. يصنف الاعداد حسب مجموعاتها العددية.

الوقت المتوقع للتدريب على هذه الوحدة: 8 ساعات تدريبية.

# المجموعات

تعريف 1 :

1.1 المجموعة هي أي تجمع من الأشياء الحسية أو المعنوية المستقلة التي يمكن تمييزها عن غيرها من الأشياء بشكل دقيق وقاطع لا يختلف فيه، وكل عنصر منها يعتبر كائن مستقل بذاته في المجموعة.

**مثال 1 :** لتكن لدينا المجموعتان التاليتان:

a) مجموعة أحرف اللغة العربية.

b) مجموعة الحدائق الجميلة في المملكة.

نعتبر a) مجموعة لأن عناصرها معروفة ومحددة. أما بالنسبة للمجموعة b) فلا نعتبرها مجموعة رياضية لأنها غير معرفة بشكل محدد ودقيق لأن الجمال نسبي وليس دقيق ويتفاوت من حديقة الى حديقة أخرى.

**2.1 رمز المجموعات وعناصرها :**

نرمز للمجموعات (تسميتها) عادة بالأحرف اللاتينية الكبيرة مثل $A,B,C,\ldots,Y,Z$ والاشياء التي تتألف منها المجموعات تسمى عناصر ويرمز للعناصر بالأحرف الصغير مثل $a,b,c,\ldots,y,z$

**3.1 طرق تعريف المجموعة:**

يتم كتابة المجموعة بين قوسين بهذا الشكل { } وعناصر المجموعة تكتب داخل القوسين وتوضع فواصل بينها ، **مثال** على ذلك :

$$A=\{2,a,3,5,7,b,s,m\}$$

يعبر عن المجموعة بإحدى الطريقتين :

**1.3.1 طريقة السرد ( الحصر) :**

**مثال 2 :** مجموعة الحروف المكونة لكلمة red هي: $A=\{r,e,d\}$

**مثال 3 :** $A$: مجموعة الاعداد الزوجية المحصورة بين $1$ و $9$ هي :

$A=\{2,4,6,8\}$

**2.3.1 طريقة الوصف:**

ويتم فيها ذكر صفة أو خاصية تميز عناصر المجموعة مثال A هي مجموعة الأعداد الطبيعية .

$$B=\{x:\text{الخاصية أو الصفة}\}$$

**مثال 4** : مجموعة أيام الأسبوع $B = \{x : x$ يوم من أيام الاسبوع $\}$

### 3.3.1 طريقة القاعدة:

يكون تسلسل العناصر له نمط ظاهر، بحيث يمكن التعبير عنها بقاعدة معينة

**مثال 5** : المجموعة $A=\{2,4,6,8\}$ يمكن كتابتها بالقاعدة التالية :

$$B = \{x : x \in N, x \text{ زوجي}, 2 \le x \le 8\}$$

حيث $N$ هي مجموعة الأعداد الطبيعية

وتقرأ $A$ هي المجموعة المكونة من العناصر $x$ ، حيث إن $x$ عدد زوجي طبيعي أكبر من أو يساوي $2$ وأصغر من أو يساوي $8$ .

### 4.1 العلاقة بين العنصر والمجموعة:

تكون العلاقة بين العنصر والمجموعة اما ينتمي بالرمز $\in$ أو لا ينتمي بالرمز $\notin$

**مثال 6 :** المجموعة $A = \{2,4,7,a,c\}$

العنصر $2$ هو أحد عناصر المجموعة $A$ يقال 2 ينتمي إلى المجموعة $A$ ونرمز له بالرمز

$(\ 2 \in A\ )$

العنصر $8$ ليس أحد عناصر المجموعة $A$ يقال $8$ لا ينتمي إلى المجموعة $A$ ونرمز له بالرمز

$(8 \notin A)$

### 5.1 المجموعة الجزئية:

نقول ان $A$ هي مجموعة جزئية من المجموعة $B$ إذا كانت جميع عناصر المجموعة $A$ موجودة في المجموعة $B$ ونرمز $A \subseteq B$ أي انها علاقة بين مجموعة ومجموعة أخرى ، ويمكن كتابتها رياضيا كالتالي:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall\, x\epsilon A \Rightarrow x\epsilon B$$

إذا كانت $A \subseteq B$ و $A \neq B$ فنقول ان( $A$ مجموعة جزئية فعلية من $B$) ونكتب $A \subset B$ ، وهي كل عنصر في المجموعة $A$ هي أيضاً عنصراً في المجموعة $B$ .

أما اذا كانت( $A$ ليس مجموعه جزئية فعلية من $B$ ) فتكتب $A \not\subset B$ ويقصد بانه يوجد عنصر واحد على الأقل في المجموعة $A$ ليس عنصر في المجموعة $B$ .

**مثال 7** : اذا كانت لدينا المجموعتين $A = \{1,2,3\}\ ,\ \ B = \{1,2,3,4,5\}$
وبالتالي $A \subseteq B$ ( $A$ مجموعه جزئيه من $B$ ) لأن جميع عناصر المجموعة $A$ موجودة في $B$ .
ولكن $B \not\subset A$ ( $B$ ليست مجموعه جزئيه من $A$ )، لأنه يوجد عنصر واحد على الأقل في $B$ ليس موجود في المجموعة $A$.

**مثال 8 :** اذا كانت $A = \{1,2,3,4,5\}\ ,\ B = \{1,2\}$ اكتب العبارات التالية $\in, \notin,\ \subseteq ,\not\subseteq \not\subset$ في الفراغ المناسب:

a) 2………. A , b) 1………..B
c) 6 ……….B , d) 8 …………A
e) $\{1,2,3\}$…….A , f) $\{1\}$ ………B
$g)$ $\{8,9\}$………B , h) $\{6,7\}$………..A

الحل:

a) $2 \in A$ , b) $1 \in B$
b) $6 \notin B$ , d) $8 \notin A$
$e)$ $\{1,2,3\} \subseteq A$ , f) $\{1\} \subseteq B$
$g)$ $\{8,9\} \not\subseteq B$ , h) $\{6,7\} \not\subseteq A$

**تمرين1-1:** اذا كانت $A = \{a, b, c, 4, d\}\ , B = \{a, b\}$ اكتب العبارات التالية $\subseteq$ $\in, \notin$ ، $, \not\subset\ , \not\subseteq;$ في الفراغ المناسب

a) a………. A , b) b………..B
c) c ……….B , d) e …………A
e) $\{a, b\}$…….A , f) $\{b\}$ ………B
g) $\{c, d\}$………B , h) $\{e, f\}$………..A

**6.1 تساوي مجموعتين:**
يقال للمجموعتين $A$ و $B$ متساويتين ونكتب $A = B$ اذا كانت كل منهما مجموعة جزئية (محتواة) من الأخرى ( $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ ) أي ان:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ و } B \subseteq A \Leftrightarrow (\forall\, x\epsilon A \implies x\epsilon B \text{ و} \forall\, x\epsilon B \implies x\epsilon A)$$

**مثال9 :** إذا كانت $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{2,3,1\}$ فان $A = B$
لأن $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$

أي أن المجموعة $A$ والمجموعة $B$ لهما العناصر نفسها، وترتيب العناصر في المجموعة غير مهم.

**تمرين2-1:** اذا كانت $A = B$ حيث ان $A = \{2,5,6,9\}$ و $B = \{5, x, 2,9\}$ فان قيمة $x$

$a)\ \ 6$ $\qquad b)\ \ 5$ $\qquad c)\ \ 9$ $\qquad d)\ \ 2$

## 7.1 أنواع المجموعات :

1. المجموعة الخالية: هي المجموعة التي لا تحتوي أي عنصر ويُرمز لها بالرمز $\emptyset$ أو $\{\,\}$

**مثال 10 :** مجموعة الاعداد الزوجية بين العددين 2.5 و 3.5

2. مجموعة وحيدة العنصر: هي مجموعة مكونة من عنصر وحيد .

**مثال 11:** مجموعة الاعداد الزوجية التي هي اكبر من العدد 1 واقل من العدد 3

3. المجموعة المنتهية:ـ وهي المجموعة التي تحتوي عدد محدود من العناصر.

**مثال 12 :** أيام الأسبوع

4. المجموعة اللانهائية (الغير منتهية): وهي المجموعة التي تحتوي عدد غير محدود من العناصر

**مثال 13:** مجموعة الأعداد الطبيعة الزوجية

5. المجموعة الشاملة : هي المجموعة التي تحتوي على جميع العناصر تحت الدراسة ويرمز لها $U$ .

**خصائص المجموعة الجزئية:**

$1)\ \emptyset \subseteq A \subseteq U \qquad 2)\ A \subseteq A \qquad 3)\ A \subseteq B$ و $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

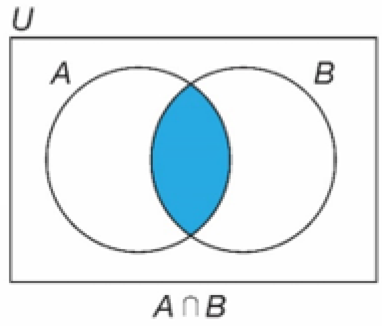
## 8.1 العمليات على المجموعات

1- تقاطع مجموعتين:

تقاطع المجموعتين $A$ و $B$ هي مجموعة جميع العناصر المشتركة بين $A$ و $B$ وتكتب كالتالي: $A \cap B$ ونعرفها رياضيا كما يلي:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ و } x \in B\}$$

ويمكن تمثيل ذلك بشكل فن حيث $U$ المجموعة الشاملة بالمستطيل والمجموعتين $A$ و $B$ بدوائر داخل المستطيل ويكون تقاطعهما المنطقة المظللة كما هو موضح بالشكل التالي:




(شكل 1 − 1)

**مثال14:** اذا كانت $B = \{2,4,3\}$ و $A = \{1,3,4,5\}$ اوجد $A \cap B$ .

الحل: $A \cap B = \{3,4\}$

**مثال15:** اذا كانت $D = \{50,100\}$ و $C = \{10,30,m,k\}$ اوجد $C \cap D$ .

الحل: $C \cap D = \phi$

**<u>خصائص التقاطع:</u>**

1) $A \cap A = A$
2) $A \cap U = A$
3) $A \cap \phi = \phi$
4) $A \cap B = B \cap A$
5) $(A \cap B) \subseteq A \,, (A \cap B) \subseteq B$
6) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

**تمرين1-3:** اذا كانت $A = \{1,3,5,a\}$ و $B = \{1,20,a,5,8\}$ فان $A \cap B$ .

$a)\ \{1,5,a\}$ $b)\ \{1,a\}$ $c)\{20,5,a\}$ $d)\ \phi$

**تمرين1-4:** اذا كانت $D = \{10,20,50\}$ و $C = \{30,60,90\}$ فان $C \cap D$ .

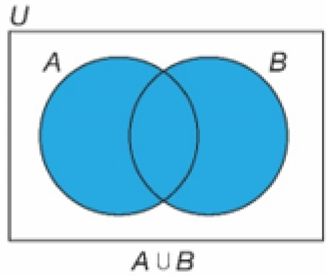
$a)\ \{30,60,90\}$ $b)\ \{20,50\}$ $c)\{20,50,90\}$ $d)\ \phi$

2-اتحاد مجوعتين:

اتحاد المجموعتين A و B هي مجموعة جميع عناصر المجموعتين A و B بدون تكرار العنصر ويرمز لهما بالرمز $A \cup B$ ونعرفها رياضيا كما يلي:

$$A \cup B = \{x : x \in A \quad \text{أو} \quad x \in B\}$$

ويمكن تمثيل الاتحاد في شكل فن بالمنطقة المظللة كالشكل التالي:




(شكل 1 − 2)

**خصائص الاتحاد:**

$1)\ A\cup A=A \quad 2)\ A\cup U=U \quad 3)\ A\cup\phi=A \quad 4)\ A\cup B=B\cup A$

$5)\ (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C) \quad 6)\ A\subseteq(A\cup B)\ ,\ B\subseteq(A\cup B)$

**مثال16:** اذا كانت $A=\{2,4,3\}$ و $B=\{1,3,4,5\}$ اوجد $A\cup B$ .

الحل : $A\cup B=\{1,3,4,5,2\}$

**مثال17:** اذا كانت $D=\{,50,100\}$ و $C=\{10,30,m,k\}$ اوجد $C\cup D$ .

الحل : $C\cup D=\{10,30,m,k,50,100\}$

**تمرين1-5:** اذا كانت $A=\{1,5,a\}$ و $B=\{1,20,a,5,8\}$ فان $A\cup B$ يساوي:

$a)\ \{1,5,a,20,8\} \quad b)\ \{1,5,a\} \quad c)\{8,20\} \quad d)\ \phi$

**تمرين1-6:** اذا كانت $D=\{10,20,50\}$ و $C=\{30,60,90\}$ فان $C\cup D$ يساوي:

$a)\ \{30,60,90,10,20,50\} \quad b)\ \{10,20,50\} \quad c)\{30,60,90\} \quad d)\ \phi$

**العلاقة بين الاتحاد والتقاطع:**

اذا كانت $A,B,C$ ثلاث مجموعات فان :

أي ان الاتحاد توزيع على التقاطع $1)\ A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup B)$

أي ان التقاطع توزيع على الاتحاد $1)\ A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap B)$

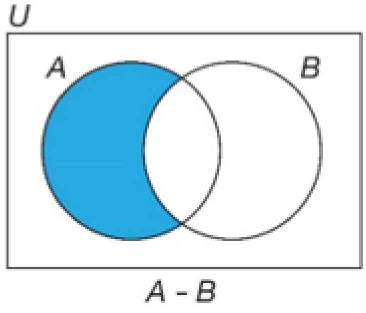
3-الفرق بين مجموعتين :

نعرف حاصل طرح المجموعة $B$ من المجموعة $A$ هي مجموعة جميع العناصر الموجودة في $A$ وليست في $B$ ويرمز لها بالرمز $A-B$ ونكتب رياضيا:

$$A-B=\{x: x\in A \text{ و } x\notin B\}$$

$$B-A=\{x: x\in B \text{ و } x\notin A\}$$

ويمكن تمثيل الفرق $A-B$ في شكل فن بالمنطقة المظللة كما في الشكل التالي:




(شكل $3-1$)

**خصائص الفرق:**

1) $A - A = \phi$

2) $A - U = \phi$

3) $A - \phi = A$

4) $A - B = B - A \Leftrightarrow A = B$

5) $A - B = A \Leftrightarrow A \cap B = \phi$

6) $A - B = \phi \Leftrightarrow A \subseteq B$

**مثال18:** اذا كانت $A = \{2,4,3,5\}$ و $B = \{1,3,a,5,b\}$ اوجد $A - B$ و $B - A$

الحل :

$A - B = \{2,4\}$

$B - A = \{1,a,b\}$

**تمرين 1-7:** اذا كانت $D = \{10,20,50,100\}$ و $C = \{10,30,40,50\}$ فان $C - D$

$a)\ \{30,40\} \quad b)\ \{10,20,50\} \quad c)\{30,60,90\} \quad d)\ \phi$

**تمرين1-8:** اذا كانت $D = \{10,20,50,100\}$ و $C = \{10,30,40,50\}$ فان $D - C$

$a)\ \{30,40\} \quad b)\ \{20,100\} \quad c)\{30,60,90\} \quad d)\ \phi$

**تمرين1-9:** اذا كانت $A = \{10,20,30\}$ و $B = \{10,20,30\}$ فان $A - B$

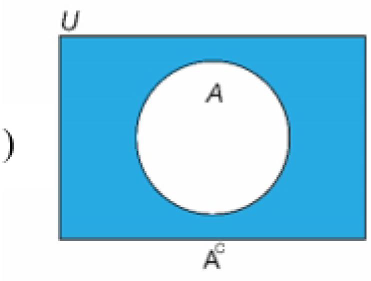
$a)\ \{10,20,30\} \quad b)\ \{10,20,30\} \quad c)\{30\} \quad d)\ \phi$

4-متممة المجموعة :

اذا كانت $U$ مجموعة شاملة بالنسبة للمجموعة $A$ نعرف متممة $A$ بانها مجموعة جميع العناصر الموجودة في المجموعة الشاملة $U$ وليست في $A$ ويرمز لها بالرمز $\bar{A}$ أو $A^C$ وتعرف رياضيا:

$$\bar{A} = U - A = \{x : x \in U \text{ و } x \notin A\}$$

ويمكن تمثيل المتممة $\bar{A}$ في شكل فن بالمنطقة المظللة كما في لشكل التالي:



(شكل 1 − 4)

**مثال19:** اذا كانت $U = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ و $A = \{1,2,3\}$ اوجد $\bar{A}$

الحل: $\bar{A} = \{4,5,6,7\}$

**مثال20:** اذا كانت $U = \{1,2,3,4,5\}$ و $B = \{1,2,3,4,5\}$ اوجد $\bar{B}$

الحل: $\bar{B} = \emptyset$

**خصائص المتممة:**

3) $\bar{\emptyset} = U$ 2) $\bar{A} \cap A = \emptyset$ 1) $\bar{A} \cup A = U$

5) $\bar{\bar{A}} = A$ 4) $\bar{U} = \emptyset$

**تمرين1-10:** اذا كانت $U = \{10,20,30,40,50\}$ و $A = \{10,20\}$ فان $\bar{A}$

$a)\ \{10,20,30\}$ $b)\ \{30,40,50\}$ $c)\ \{40,50\}$ $d)\ \emptyset$

**تمرين1-11:** اذا كانت $U = \{60,70,80,90,100\}$ و $B = \{60,70,80,90,100\}$

فان $\bar{B}$

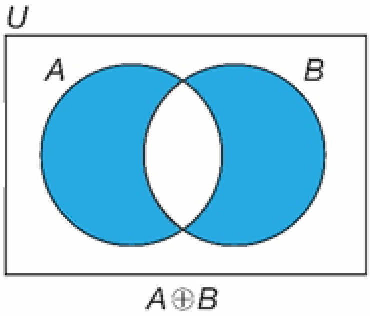
$a)\ \{60,70,80,90,100\}$ $b)\ \{60,70,80\}$ $c)\ \{90,100\}$ $d)\ \emptyset$

5-الفرق التناظري بين مجموعتين :

نعرف الفرق التناظري بين مجموعتين $A$ و $B$ هي مجموعة جميع العناصر الموجودة اما في $A$ أو في $B$ ولكن ليست موجودة في العناصر المشتركة بين المجموعتين ويرمز لها بالرمز $A \oplus B$ ونكتب رياضيا:

$$A \oplus B = \{x : x \in A \cup B \text{ و } x \notin A \cap B\}$$

ويمكن تمثيل الفرق التناظري $A \oplus B$ في شكل فن بالمنطقة المظللة كما في الشكل التالي:




(شكل 1 − 5)

**مثال21:** اذا كانت $A = \{1,2,3,4,5\}$ و $B = \{1,2,7\}$ اوجد $A \oplus B$

الحل : $A \oplus B = \{7,3,4,5\}$

**تمرين1-12:** اذا كانت $A = \{20,40,60,80\}$ و $B = \{20,30,40,50\}$ فان $A \oplus B$

$a)$ $\{20,30,40,50\}$ $b)$ $\{30,50,60,80\}$ $c)$ $\{20,40,60,80\}$ $d)$ $\emptyset$

**<u>خصائص الفرق التناظري:</u>**

1) $A \oplus A = \emptyset$ , 2) $A \oplus \emptyset = A$ ,3) $A \oplus U = \bar{A}$ , 4) $A \oplus B = B \oplus A$
5) $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$ ,6)$A \oplus B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$

9.1 قانون ديمورغان :

1- $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$

2- $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$

**مثال 22:** اذا كانت المجموعة الشاملة $U = \{10,20,30,40,50\}$

وكانت $A = \{10,30\}, B = \{30,50\}, C = \{40,50\}$ اوجد

1)$A \cap B$ 2)$A \cap C$ 3)$A \cup B$ 4)$B \cup C$ 5)$A - B$

6)$C - B$ 7) $\bar{A}$ 8)$\bar{B}$ 9)$\bar{C}$ 10)$A \oplus B$

الحل :

1)$A \cap B = \{30\}$
2)$A \cap C = \emptyset$
3)$A \cup B = \{10,30,50\}$
4)$B \cup C = \{30,50,40\}$
5)$A - B = \{10\}$
6)$C - B = \{40\}$
7)$\bar{A} = \{20,40,50\}$
8)$\bar{B} = \{10,20,40\}$
9)$\bar{C} = \{10,20,30\}$

$10) A \oplus B = \{10,50\}$

**تمرين 1-13 :** اذا كانت المجموعة الشاملة $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

وكانت $A = \{1,3,5,6\}, B = \{2,5,9\}, C = \{4,7\}$ فإن :

$1) A \cap B =$

$a)$ $\{5\}$ $b)$ $\{1,3\}$ $c)$ $\{1,3,5,6,2,9\}$ $d)$ $\emptyset$

$2) A \cap C =$

$a)$ $\{1,3\}$ $b)$ $\{1,3,5,6,4,7\}$ $c)$ $\{4,7\}$ $d)$ $\emptyset$

$3) B \cup C =$

$a)$ $\{4,7\}$ $b)$ $\{1,3\}$ $c)$ $\{2,5,9,4,7\}$ $d)$ $\emptyset$

$4) A - B =$

$a)$ $\{10,4,7\}$ $b)$ $\{1,3,6\}$ $c)$ $\{2,5\}$ $d)$ $\emptyset$

$5)$ $C - B =$

$a)$ $\{4,7\}$ $b)$ $\{1,3\}$ $c)$ $\{2,5,9,4,7\}$ $d)$ $\emptyset$

$6) A^c =$

$a)$ $\{4,7\}$ $b)$ $\{1,3,5,6\}$ $c)$ $\{2,4,7,8,9,10\}$ $d)$ $\emptyset$

$7) C^c =$

$a)$ $\{4,7\}$ $b)$ $\{1,2,3,5,6,8,9,10\}$ $c)$ $\{8,9,10\}$ $d)$ $\emptyset$

$8) A \oplus B$

$a)$ $\{1,3,5,6,2,9\}$ $b)$ $\{1,3,6,2,9\}$ $c)$ $\{5\}$ $d)$ $\emptyset$

## المجموعات العددية

في دراستنا العلمية نحتاج للتعامل مع عدة مجموعات عددية كل منها توسيع وامتداد لسابقتها.

**1.مجموعة الأعداد الطبيعية:**

هي مجموعة الاعداد الأساسية المألوف عليها ونرمز لها بالحرف اللاتيني الكبير $N$

$$N = \{1,2,3,4,5, \dots\}$$

**2.مجموعة الأعداد الكلية:**

هي مجموعة الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ مضافا اليها العدد 0 ويرمز لها بالحرف $W$

$$W = \{0,1,2,3,4,5, \dots\}$$

**3.مجموعة الأعداد الصحيحة:**

هي مجموعة الاعداد الكلية مضافا اليها مجموعة الاعداد السالبة ويرمز لها بالرمز $Z$

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

**4.مجموعة الأعداد الكسرية ( النسبية) :**

هي مجموعة الاعداد التي يمكن كتابتها على صورة كسر ( $\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}$ ) ، بحيث المقام لا يساوي صفر ، ونرمز لها بالرمز $Q$ ويمكن كتابتها على الصورة $Q = \{x : x = \frac{a}{b}\ ,\ a,b \in Z\ , b \neq 0\}$

**5.مجموعة الأعداد الغير كسريه (غير نسبية) :**

هي مجموعة الاعداد التي لا يمكن كتابتها على صورة كسر مثل : $\sqrt{3}\ , \sqrt{7}, \frac{1}{\sqrt{5}}\ , e, \pi$ ويرمز لها بالرمز $(\bar{Q})$ .

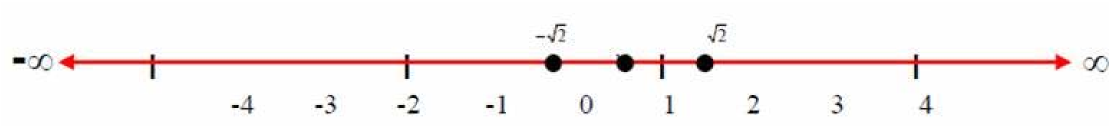
فمثلا التمثيل العشري للأعداد غير الكسرية:

$$\pi = 3.1415 \dots. \quad ; \quad e = 2.71828 \dots \quad ; \quad \sqrt{3} = 1.7320508 \dots.$$

**ملاحظه1 :** التقريب النسبي للعدد الغير النسبي $\pi$ هو $\pi \approx 3.14$ أو $\pi \approx \frac{22}{7}$

**6.مجموعة الأعداد الحقيقية :**

هي مجموعة جميع الاعداد الطبيعية والكلية والصحيحة والكسرية والغير كسرية ويرمز لها بالرمز $R$ ويمكن تمثيلها بيانيا بنقاط على خط افقي يسمى خط الاعداد الحقيقية، بحيث تقع نقطة الصفر في المنتصف والاعداد الموجبة على اليمين والاعداد السالبة عل اليسار كما في الشكل التالي:

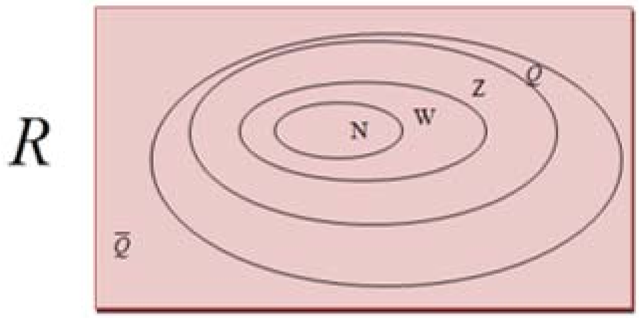



**ملاحظه**

1) $N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq \bar{Q} \subseteq R$

2) $Q \cup \bar{Q} = R$

3) $Q \cap \bar{Q} = \emptyset$




(شكل 1-6)

## تمارين(1-14)

1. يرمز لمجموعة الاعداد الصحيحة بالرمز

a) R  b) Z  c) N  d) Q

2. يرمز لمجموعة الاعداد الغير كسريه بالرمز

a) R  b) Z  c) W  d) $\bar{Q}$

3. يرمز لمجموعة الاعداد الحقيقية بالرمز

a) R b) Z c) W d) Q

4. يرمز لمجموعة الاعداد الكسرية بالرمز

a) R b) Z c) W d) Q

5. يرمز لمجموعة الاعداد الكلية بالرمز

a) R b) Z c) W d) Q

6. اذا كانت $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{1,2,3,4,5\}$ فإن

a) $A \subseteq B$ b) $A \nsubseteq B$ c) $A \in B$ d) $A \notin B$

7. اذا كانت $B = \{1,2,3\}$ فإن

a) $1 \subseteq B$ b) $1 \nsubseteq B$ c) $1 \in B$ d) $1 \notin B$

8. يرمز للمجموعة الخالية بالرمز

a) A b) $\emptyset$ c) U d) $A^c$

9. يرمز للمجموعة الشاملة بالرمز

a) A b) $\emptyset$ c) U d) $A^c$

10. اذا كانت $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{4,5\}$ فإن $A \cup B =$

a) $\{4,5\}$ b) $\{1,2,3\}$ c) $\{1,2,3,4,5\}$ d) $\emptyset$

11. اذا كانت $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{3,4\}$ فإن $A \cap B =$

a) $\{3\}$ b) $\{1,2,3\}$ c) $\emptyset$ d) $\{1,2,3,4,5\}$

12. اذا كانت $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{5,4\}$ فإن $A \cap B =$

a) $\{3\}$ b) $\{1,2,3\}$ c) $\emptyset$ d) $\{1,2,3,4,5\}$

13. اذا كانت $B = \{ 1,2\}$ و $A = \{ 1,2,3,4\}$ فإن $A - B =$

a) $\{ 1,2,3,4\}$ b) $\{ 1\}$ c) $\{ 3,4\}$ d) $\{ 1,2\}$

14. اذا كانت $U = \{ 1,2,3,4,5\}$ و $A = \{ 1,2\}$ و فإن $\overline{A} =$

a) $\{ 1,2\}$ b) $\{ 1,3\}$ c) $\{ 4,2\}$ d) $\{ 3,4,5\}$

15. يرمز لمجموعة الاعداد الطبيعية بالرمز

a) N b) W c) Q d) R

16. $(\overline{A \cap B}) =$

a) $\bar{A} \cap \bar{B}$ b) $\bar{A} \cup \bar{B}$ c) $\bar{A} \cup B$ d) $A \cap \bar{B}$

.17 $(\overline{A \cup B}) =$

a) $\bar{A} \cap \bar{B}$ b) $\bar{A} \cup \bar{B}$ c) $\bar{A} \cup B$ d) $A \cap \bar{B}$

.18 العدد التالي يمثل عدد طبيعي

a) $\pi$ b) -1 c) 0 d) 5

.19 العدد التالي يمثل عدد صحيح

a) $\pi$ b) $-6$ c) $e$ d) $\frac{2}{3}$

.20 اذا كانت $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{1,2,4,5\}$ فإن $A \oplus B$ تساوي

a) $\{3,4,5\}$ b) $\{1,2\}$ c) $\{1,2,3,4,5\}$ d) $\emptyset$

<table>
<tr><td colspan="3">نموذج تقييم المتدرب لمستوى أدائه<br>يعبأ من قبل المتدرب نفسه وذلك بعد الانتهاء من تمارين الوحدة</td></tr>
<tr><td colspan="3">بعد الانتهاء من التدرب على وحدة المجموعات، قيم نفسك وقدراتك بواسطة إكمال هذا التقييم الذاتي بعد كل عنصر من العناصر المذكورة، وذلك بوضع علامة (✓) أمام مستوى الأداء الذي أتقنته، وفي حالة عدم قابلية المهمة للتطبيق ضع العلامة في الخانة الخاصة بذلك.</td></tr>
<tr><td>م</td><td>العناصـــــر</td><td>مستوى الأداء (هل أتقنت الأداء)</td></tr>
</table>

| | | غير قابل للتطبيق | لا | جزئيا | كليا |
|---|---|---|---|---|---|
| .1 | مفهوم المجموعات | | | | |
| .2 | تعريف المجموعة بقاعدة معينة | | | | |
| .3 | تمييز خصائص المجموعات | | | | |
| .4 | حساب العمليات على المجموعات | | | | |
| .5 | تمييز المجموعة الجزئية | | | | |
| .6 | تصنيف الاعداد حسب مجموعتها العددية | | | | |
| يجب أن تصل النتيجة لجميع المفردات (البنود) المذكورة إلى درجة الإتقان الكلي أو أنها غير قابلة للتطبيق، وفي حالة وجود مفردة في القائمة "لا" أو "جزئيا" فيجب إعادة التدرب على هذا النشاط مرة أخرى بمساعدة المدرب. | | | | | |

نموذج تقييم المدرب لمستوى أداء المتدرب

يعبأ من قبل المدرب وذلك بعد الانتهاء من تمارين الوحدة

اسم المتدرب : ............................................................ التاريخ: ....................................

رقم المتدرب : ............................................................ المحاولة : 1 2 3 4 العلامة : ...... ...... ...... ......

كل بند أو مفردة يقيم بـ 10 نقاط

الحد الأدنى: ما يعادل 80% من مجموع النقاط. الحد الأعلى: ما يعادل 100% من مجموع النقاط.

| م | بنود التقييم | النقاط ( حسب رقم المحاولات ) | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | مفهوم المجموعات | | | | |
| 2 | تعريف المجموعة بقاعدة معينة | | | | |
| 3 | تمييز خصائص المجموعات | | | | |
| 4 | حساب العمليات على المجموعات | | | | |
| 5 | تمييز المجموعة الجزئية | | | | |
| 6 | تصنيف الاعداد حسب مجموعتها العددية | | | | |
| المجموع | | | | | |

ملحوظات: ............................................................................................................

توقيع المدرب: ..............................

# الوحدة الثانية

# العمليات الحسابية على الأعداد النسبية والحقيقية

# الوحدة الثانية
# العمليات الحسابية على الأعداد النسبية والحقيقية

الهدف العام للوحدة:
تهدف هذه الوحدة إلى القيام بالعمليات الحسابية على مجموعة الأعداد النسبية و الحقيقية.

الأهداف التفصيلية:
**من المتوقع في نهاية هذه الوحدة التدريبية أن يكون المتدرب قادراً وبكفاءة على أن:**

1. يحسب العمليات الحسابية على الأعداد الكسرية .
2. يحسب العمليات الحسابية على الأعداد العشرية.
3. يكتب تقريب الاعداد العشرية .
4. يميز خصائص الأعداد الحقيقية .
5. يحسب العمليات الحسابية على الأعداد الحقيقية مراعياً العمليات الاولية .

الوقت المتوقع للتدريب على هذه الوحدة: 8 ساعات تدريبية.

## العمليات الحسابية على الاعداد الكسرية

1.2الكسر عباره عن بسط ومقام ( $\frac{a}{b}$ ) ، بحيث $a$ البسط و $b$ المقام ، المقام لا يساوي صفر ($b \neq 0$ )

2.2 خصائص الكسور :

إذا كانت $a, b, c, d$ أعداد حقيقية فإن:

### 1.2.2ضرب الكسور

هي عبارة عن حاصل ضرب البسط في البسط والمقام في المقام.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \qquad b, d \neq 0$$

**مثال1:** احسب ما يلي

$a)\ \frac{2}{4} \times \frac{3}{4} =$ $\quad b)\ \frac{4}{5} \times \frac{-5}{6} =$ $\quad c)\ \frac{-3}{4} \times \frac{-2}{5} =$ $\quad d)\ \frac{-2}{3} \times \frac{6}{13} =$

الحل:

$$a)\ \frac{2}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{4 \times 4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$b)\ \frac{4}{5} \times \frac{-5}{6} = \frac{4 \times -5}{5 \times 6} = \frac{-20}{30} = \frac{-2}{3}$$

$$c)\ \frac{-3}{4} \times \frac{-2}{5} = \frac{-3 \times -2}{4 \times 5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

$$d)\ \frac{-2}{3} \times \frac{6}{13} = \frac{-2 \times 6}{3 \times 13} = \frac{-12}{39} = \frac{-4}{13}$$

**تمرين2-1:** اختر الإجابة الصحيحة:

$1)\ \frac{5}{6} \times \frac{3}{6} =$

$a)\ \frac{15}{12}$ $\quad b)\ \frac{15}{36}$ $\quad c)\ \frac{8}{36}$ $\quad d)\ \frac{8}{12}$

2) $\frac{-4}{5} \times \frac{7}{8} =$

a) $\frac{-28}{40}$ b) $\frac{-11}{13}$ c) $\frac{3}{13}$ d) $\frac{-24}{40}$

3) $\frac{-5}{6} \times \frac{-2}{4} =$

a) $\frac{-7}{24}$ b) $\frac{-10}{24}$ c) $\frac{7}{24}$ d) $\frac{10}{24}$

### 2.2.2 قسمة الكسور

عند قسمة كسرين نحول عملية القسمة الى عملية ضرب ( الكسر الأول في مقلوب الكسر الثاني) ثم نضرب البسط في البسط والمقام في المقام.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c} \qquad b, c \neq 0$$

**مثال2:** احسب ما يلي:

a) $\frac{2}{4} \div \frac{5}{6} =$ b) $\frac{3}{7} \div \frac{-2}{6} =$ c) $\frac{-3}{8} \div \frac{-9}{7} =$

الحل:

$$a) \quad \frac{2}{4} \div \frac{5}{6} = \frac{2}{4} \times \frac{6}{5} = \frac{2 \times 6}{4 \times 5} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$$b) \quad \frac{3}{7} \div \frac{-2}{6} = \frac{3}{7} \times \frac{6}{-2} = \frac{3 \times 6}{7 \times -2} = \frac{18}{-14} = -\frac{18}{14} = -\frac{9}{7}$$

$$c) \quad \frac{-3}{8} \div \frac{9}{-7} = \frac{-3}{8} \times \frac{-7}{9} = \frac{-3 \times -7}{8 \times 9} = \frac{21}{72} = \frac{7}{24}$$

**تمرين2-2:** اختر الإجابة الصحيحة :

1) $\frac{5}{6} \div \frac{3}{6} =$

$a)\ \frac{8}{12}$ $\quad b)\ \frac{15}{12}$ $\quad c)\ \frac{8}{36}$ $\quad d)\ \frac{30}{18}$

2) $\frac{-4}{5} \div \frac{7}{8} =$

$a)\ \frac{-32}{35}$ $\quad b)\ \frac{-11}{13}$ $\quad c)\ \frac{3}{13}$ $\quad d)\ \frac{-24}{40}$

3) $\frac{-5}{6} \div \frac{-2}{4} =$

$a)\ \frac{7}{24}$ $\quad b)\ \frac{-10}{24}$ $\quad c)\ \frac{20}{12}$ $\quad d)\ \frac{-7}{24}$

### 3.2.2 جمع وطرح الكسور

عند جمع او طرح كسرين فان لدينا حالتين:

a) المقامات متساوية.

b) المقامات غير متساوية.

**a) المقامات المتساوية :**

عند جمع او طرح كسرين ذات مقامات متساوية فإننا نجمع او نطرح البسط ونكتب المقام نفسه .

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b} \qquad b \neq 0$$

**مثال3 :** احسب ما يلي :

$a)\ \frac{2}{4}+\frac{3}{4}=$ $\quad b)\ \frac{4}{5}-\frac{2}{5}=$ $\quad c)\ \frac{-3}{7}+\frac{1}{7}=$ $\quad d)\ \frac{-2}{8}-\frac{-3}{8}=$

$$a)\ \frac{2}{4}+\frac{3}{4}=\frac{2+3}{4}=\frac{5}{4}$$

$$b)\ \frac{4}{5}-\frac{2}{5}=\frac{4-2}{5}=\frac{2}{5}$$

$$c)\ \frac{-3}{7}+\frac{1}{7}=\frac{-3+1}{7}=\frac{-2}{7}$$

$$d)\ \frac{-2}{8}-\frac{-3}{8}=\frac{-2+3}{8}=\frac{1}{8}$$

**تمرين2-3:** اختر الإجابة الصحيحة :

$1)\ \frac{5}{6}+\frac{3}{6}=$

$a)\ \frac{8}{6}$ $\quad b)\ \frac{15}{12}$ $\quad c)\ \frac{8}{36}$ $\quad d)\ \frac{8}{12}$

$2)\ \frac{4}{8}-\frac{7}{8}=$

$a)\ \frac{-24}{40}$ $\quad b)\ \frac{-11}{13}$ $\quad c)\ \frac{3}{13}$ $\quad d)\ \frac{-3}{8}$

$3)\ \frac{-5}{9}-\frac{3}{9}=$

$a)\ \frac{-10}{24}$ $\quad b)\ \frac{-8}{9}$ $\quad c)\ \frac{7}{24}$ $\quad d)\ \frac{-7}{24}$

**b) المقامات الغير متساوية:**

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{(a \times d) \pm (c \times b)}{b \times d} \qquad b\,, d \neq 0$$

**مثال4** : احسب ما يلي :

$$a)\ \frac{2}{5}+\frac{3}{4}= \qquad b)\ \frac{4}{5}-\frac{5}{6}= \qquad c)\ \frac{-3}{4}+\frac{2}{6}= \qquad d)\ \frac{-2}{3}-\frac{7}{9}=$$

$$a)\ \frac{2}{5}+\frac{3}{4}=\frac{(2\times 4)+(3\times 5)}{5\times 4}=\frac{8+15}{20}=\frac{23}{20}$$

$$b)\ \frac{4}{5}-\frac{5}{6}=\frac{(4\times 6)-(5\times 5)}{5\times 6}=\frac{24-25}{30}=\frac{-1}{30}$$

$$c)\ \frac{-3}{4}+\frac{2}{6}=\frac{(-3\times 6)+(2\times 4)}{4\times 6}=\frac{-18+8}{24}=\frac{-10}{24}$$

$$d)\ \frac{-2}{3}-\frac{7}{9}=\frac{(-2\times 9)-(7\times 3)}{3\times 9}=\frac{-18-21}{27}=\frac{-39}{27}$$

**تمرين2-4:** اختر الإجابة الصحيحة:

$$1)\ \frac{2}{6}+\frac{5}{8}=$$

$$a)\ \frac{7}{14} \qquad b)\ \frac{7}{48} \qquad c)\ \frac{2}{14} \qquad d)\ \frac{46}{48}$$

$$2)\ \frac{2}{3}-\frac{5}{6}=$$

$$a)\ \frac{-3}{18} \qquad b)\ \frac{-2}{13} \qquad c)\ \frac{5}{18} \qquad d)\ \frac{-24}{40}$$

$$3)\ \frac{-7}{8}-\frac{1}{2}=$$

$$a)\ \frac{-7}{8} \qquad b)\ \frac{-10}{16} \qquad c)\ \frac{-22}{16} \qquad d)\ \frac{-1}{2}$$

# العمليات الحسابية على الاعداد الحقيقية

## 3.2 العمليات الحسابية على الاعداد العشرية:

### 1.3.2جمع وطرح الاعداد العشرية:

يتم جمع وطرح الاعداد العشرية وذلك بتوحيد عدد الخانات العشرية على يمين الفاصلة العشرية وذلك بإضافة اصفار على يمين العدد الأقل خانات، حيث ان إضافة اصفار على يمين العدد العشري لا يؤثر في قيمة العدد العشري ،وبعدها يتم جمع وطرح الاعداد في الخانات المتناظرة مع الاحتفاظ بموقع الفاصلة العشرية.

مثلاً:

$$\mathbf{2.54 + 3.1392 =}$$

$$\begin{array}{r} \mathbf{2.5400} \\ \underline{+\ \mathbf{3.1392}} \\ \mathbf{5.6792} \end{array}$$

**مثال 5:** احسب ما يلي :

a) $3.125 + 21.32$ b) $6.48 - 2.4$

الحل :

a) $3.125 + 21.32 =$

$$\begin{array}{r} 3.125 \\ \underline{+\quad 21.320} \\ 24.445 \end{array}$$

b) $6.48 - 1.3$

$$\begin{array}{r} 6.48 \\ \underline{-\quad 1.30} \\ 5.18 \end{array}$$

**تمرين2-5:** اختر الإجابة الصحيحة :

1) $4.3521 + 2.15$

$a)$ 6.5021 $b)$ 6.50 $c)$ 6.5032 $d)$ 6.5

2) $5.79 - 3.1135$

$a)$ 2.6765 $b)$ 2.6775 $c)$ 2.6710 $d)$ 2.8

### 2.3.2 ضرب الاعداد العشرية:

لضرب عددين عشريين نجري عملية الضرب كما نجريها لعددين صحيحين بدون أي اعتبار للفاصلة العشرية ، وعند الانتهاء من عملية الضرب نضع الفاصلة العشرية بحيث تكون عدد الخانات العشرية في ناتج عملية الضرب مساوية لعدد خانات العددين العشريين .

مثلاً :

$\boxed{2.31 \times 3.2 =}$

$$\begin{array}{r} 2\,3\,1 \\ \times \quad 3\,2 \\ \hline 4\,6\,2 \\ +\ 6\,9\,3\ \ \\ \hline 7\,3\,9\,2 \end{array}$$

$2.31 \times 3.2 = \mathbf{7.392}$

**مثال6 :** احسب مايلي :

$a)$ $3.24 \times 2.1$ b) $5.2 \times 4.21$

الحل:

$a)$ $3.24 \times 2.1 = \mathbf{6.804}$

$$\begin{array}{r} 3\,2\,4 \\ \times \quad 2\,1 \\ \hline 3\,2\,4 \\ +\ 6\,4\,8\ \ \\ \hline 6\,8\,0\,4 \end{array}$$

$a)$ $5.2 \times 4.21 = \mathbf{21.892}$

$$\begin{array}{r} 4\,2\,1 \\ \times \quad 5\,2 \\ \hline 8\,4\,2 \\ +\ 2\,1\,0\,5\ \ \\ \hline 2\,1\,8\,9\,2 \end{array}$$

**تمرين2-6:** اختر الإجابة الصحيحة :

1) $4.352 \times 2.1$

$a)$ 9.1392 $b)$ 91.383 $c)$ 913.54 $d)$ 9139.1

2) $5.7 \times 3.11$

$a)$ 1.7727 $b)$ 177.27 $c)$ 1772.7 $d)$ 17.727

### 3.3.2 قسمة الاعداد العشرية:

لقسمة الاعداد العشرية نساوي عدد الخانات العشرية وذلك بإضافة أصفار على يمين العدد الأقل خانات ونلغي الفواصل ثم نقوم بالقسمة كقسمة عددين صحيحين حتى يصبح القاسم أقل من المقسوم عليه فنضيف الى يمينه صفراً مع وضع الفاصلة في الناتج ونتابع القسمة مع إضافة صفر الى القاسم كلما اصبح اقل من المقسوم عليه .

**مثال 7** : $21.566 \div 6.8$

نوحد عدد الخانات العشرية ونلغي الفواصل فيصبح المطلوب حساب حاصل قسمة

$$21566 \div 6800$$

$$\begin{array}{r|l}
 & \quad 3.17 \\ \hline
6800 & \quad 21556 \\
 & -20400 \\ \cline{2-2}
 & \quad 11560 \\
 & -\ \ 6800 \\ \cline{2-2}
 & \quad 47600 \\
 & -47600 \\ \cline{2-2}
 & \quad 00000
\end{array}$$

**تمرين2-7:** اختر الإجابة الصحيحة :

1) $151.34 \div 65.8$

$a)$ 5.3 $b)$ 2.3 $c)$ 6.3 $d)$ 8.3

2) $13.392 \div 3.1$

$a)$ 5.32 $b)$ 8.32 $c)$ 1.32 $d)$ 4.32

## 4.2 تقريب عدد عشري

عند تقريب عدد عشري يُنظر إلى الرقم أو الجزء العشري التي تقع إلى اليمين من الرقم أو الجزء العشري المراد التقريب إليها :

a. إذا كان الرقم أقل من او يساوي 4 يبقى الرقم المراد التقريب اليه ولا يتغير
b. إذا كان الرقم اكبر من او يساوي 5 يُضاف واحد إلى الرقم الذي يقع في الجزء العشري المراد التقريب إليه.
c. عند الانتهاء من عملية التقريب نحذف جميع الاعداد العشرية التي يمين العدد العشري المراد تقريبه.

**مثال 8:** قرب الاعداد العشرية التالية الى عدد صحيح و جزء من عشره – جزء من مائة – جزء من الف :

| العدد العشري | عدد صحيح | جزء من عشره | جزء من مئة | جزء من ألف |
|---|---|---|---|---|
| **3.62685** | **4** | **3.6** | **3.63** | **3.627** |
| **16.25217** | **16** | **16.3** | **16.25** | **16.252** |
| **8.5619** | **9** | **8.6** | **8.56** | **8.562** |

**تمرين2-8:** اختر الإجابة الصحيحة :

$1)$ تقريب $3.52681$ الى عدد صحيح هو

$a)$ 3 $b)$ 4 $c)$ 5 $d)$ 6

$2)$ تقريب $3.52681$ الى جزء من عشره هو

$a)$ 3.2 $b)$ 3.5 $c)$ 3.52 $d)$ 3.62681

$3)$ تقريب $3.52681$ الى جزء من مئة هو

$a)$ 3.5 $b)$ 3.53 $c)$ 3.52 $d)$ 3.52681

$4)$ تقريب $3.52681$ الى جزء من الف هو

$a)$ 3.52 $b)$ 3.526 $c)$ 3.527 $d)$ 3.52781

## 5.2 خصائص الاعداد الحقيقية:

اذا كان $a, b, c \in R$ فان :

| الخاصية | الجمع | الضرب |
|---|---|---|
| a. الابدال | $a + b = b + a$<br>$3 + 5 = 5 + 3$ | $a \cdot b = b \cdot a$<br>$2 \times 4 = 4 \times 2$ |

| | | |
|---|---|---|
| b. التجميع | $(a+b)+c=a+(b+c)$<br>$(2+4)+3=2+(4+3)$ | $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$<br>$(3\times5)\times2=3\times(5\times2)$ |
| c. العنصر المحايد | $a+0=0+a$<br>$2+0=0+2$ | $a\cdot1=1\cdot a$<br>$5\times1=1\times5$ |
| d. النظير | $a+(-a)=(-a)+a=0$<br>$7+(-7)=(-7)+7=0$ | $a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1\ ,a\neq0$<br>$3\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\cdot3=1$ |
| e. التوزيع | $(b+c)a=ba+ca$ , | $a(b+c)=ab+ac$ |

ملاحظة:

a. الصفر هو العنصر المحايد الجمعي.

b. الواحد هو العنصر المحايد الضربي.

**مثال9 :** اوجد النظير الجمعي والضربي للعدد $5$ ؟

الحل: النظير الجمعي للعدد $5$ هو $-5$ لان $5-5=0$

النظير الضربي للعدد $5$ هو $\frac{1}{5}$ لان $5\times\frac{1}{5}=1$

ملاحظة : $5\times\frac{1}{5}=\frac{5}{1}\times\frac{1}{5}=\frac{5\times1}{1\times5}=\frac{5}{5}=1$

**مثال10 :** اوجد النظير الجمعي والضربي للعدد $\frac{2}{3}$ ؟

الحل: النظير الجمعي للعدد $\frac{2}{3}$ هو $-\frac{2}{3}$ لان $\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=0$

النظير الضربي للعدد $\frac{2}{3}$ هو $\frac{3}{2}$ لان $\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}=1$

**تمرين2-9:** اختر الإجابة الصحيحة:

1) النظير الجمعي للعدد $-8$

$a)\ 8 \quad b)\ -8 \quad c)\ \frac{1}{8} \quad d)\ -\frac{1}{8}$

2) النظير الضربي للعدد $-8$

$a)\ 8 \quad b)\ -8 \quad c)\ \frac{1}{8} \quad d)\ -\frac{1}{8}$

## 6.2 العمليات على الأعداد الحقيقية :

لمنع حدوث خطأ و التباس أثناء حل المسائل استخدم عزيزي المتدرب ترتيب العمليات الحسابية التالي:

**ترتيب العمليات**

1) احسب كل القوى و الجذور.
2) أجر عملية الضرب أو القسمة حسب الترتيب مبتدئاً من اليسار إلى اليمين.
3) أجر عملية الجمع أو الطرح حسب الترتيب مبتدئاً من اليسار إلى اليمين.

**ملاحظات مهمة:**

1- إذا كان في المسألة أقواس فإننا نجري العمليات التي بداخل الأقواس أولاً و هو ما يسمى بفك الأقواس.

2- أجر العمليات الموجودة فوق و تحت خط الكسر كلاً على حده.

**مثال 11 :** احسب ما يلي:

$a)\ \ 6+3-1$ $\qquad b)\ \ 3-(-2)$ $\qquad c)\ \ 4-(5-1)$ $\qquad d)\ \ 3+2.5$

$e)\ \dfrac{5-3+1}{3(2+5)}$ $\qquad f)\ 2(5+\dfrac{3}{5})$

الحل :

$a)\ \ 6+3-1\ \ =9-1=8$

$b)\ \ 3-(-2)=3+2=5$

$c)\ \ 4-(5-1)=4-(4)=4-4=0$

$d)\ \ 3+2.5=5.5$

$$e)\ \frac{5-3+1}{3(2+5)}=\frac{3}{3(7)}=\frac{3}{21}$$

$$f)\ 2\left(5+\frac{3}{5}\right)=2\left(\frac{5}{1}+\frac{3}{5}\right)=2\left(\frac{5\times 5+3\times 1}{1\times\ 5}\right)=2\left(\frac{25+3}{5}\right)=2\left(\frac{28}{5}\right)$$
$$=\frac{2\times 28}{5}=\frac{56}{5}$$

**تمرين2-10:** اختر الإجابة الصحيحة:

$1)\quad 7+4-2=$

$a)\ \ 9$ $\qquad b)\ \ 4$ $\qquad c)\ \ \dfrac{1}{8}$ $\qquad d)\ \ -\dfrac{1}{8}$

2) $2(3-1) =$

$a)\ 9$ $b)\ 4$ $c)\ \frac{1}{8}$ $d)\ -\frac{1}{8}$

3) $3.1 + 2.25 =$

$a)\ 5.25$ $b)\ 5.35$ $c)\ 6.25$ $d)\ 3.25$

4) $\frac{2}{3}(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}) =$

$a)\ \frac{8}{12}$ $b)\ \frac{2}{3}$ $c)\ \frac{4}{4}$ $d)\ \frac{3}{3}$

## تمارين (2-11 )

اختر الإجابة الصحيحة:

1) $\frac{3}{5} \times \frac{5}{5} =$

$a)\ \frac{15}{25}$ $b)\ \frac{15}{10}$ $c)\ \frac{8}{36}$ $d)\ \frac{8}{12}$

2) $\frac{-2}{5} \times \frac{6}{6} =$

$a)\ \frac{-28}{40}$ $b)\ \frac{-12}{30}$ $c)\ \frac{-12}{11}$ $d)\ \frac{-24}{40}$

3) $\frac{-3}{4} \times \frac{-2}{3} =$

$a)\ \frac{10}{24}$ $b)\ \frac{-10}{24}$ $c)\ \frac{6}{12}$ $d)\ \frac{-5}{12}$

4) $\frac{5}{5} \div \frac{3}{5} =$

a) $\frac{30}{18}$ b) $\frac{15}{25}$ c) $\frac{25}{15}$ d) $\frac{8}{12}$

5) $\frac{-4}{5} \div \frac{3}{4} =$

a) $\frac{-32}{20}$ b) $\frac{-11}{13}$ c) $\frac{-16}{15}$ d) $\frac{-24}{40}$

6) $\frac{-2}{9} \div \frac{-1}{4} =$

a) $\frac{20}{12}$ b) $\frac{-8}{9}$ c) $\frac{8}{9}$ d) $\frac{-7}{24}$

7) $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} =$

a) $\frac{3}{25}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{3}{10}$ d) $\frac{8}{12}$

8) $\frac{1}{9} - \frac{6}{9} =$

a) $\frac{-3}{8}$ b) $\frac{-5}{9}$ c) $\frac{6}{81}$ d) $\frac{-24}{40}$

9) $\frac{-4}{6} - \frac{1}{6} =$

a) $\frac{-5}{6}$ b) $\frac{4}{36}$ c) $\frac{7}{24}$ d) $\frac{-7}{24}$

10) $\frac{1}{3} + \frac{2}{4} =$

a) $\frac{2}{7}$ b) $\frac{3}{12}$ c) $\frac{3}{7}$ d) $\frac{10}{12}$

11) $\frac{1}{4} - \frac{4}{5} =$

a) $\frac{-3}{18}$ b) $\frac{-11}{20}$ c) $\frac{3}{20}$ d) $\frac{-24}{40}$

12) $32.154 + 4.23$
$a)$ 34.384 $b)$ 36.384 $c)$ 35.897 $d)$ 36

13) $5.89 - 3.24$
$a)$ 2.6765 $b)$ 2.85 $c)$ 2.98 $d)$ 2.65

14) $5.2 \times 3.4$
$a)$ 11.2 $b)$ 17.68 $c)$ 15.89 $d)$ 22.78

15) $3.2 \times 1.2$
$a)$ 3.84 $b)$ 3.2 $c)$ 1.2 $d)$ 3

16) $48.672 \div 15.21$
$a)$ 5.3 $b)$ 3.2 $c)$ 2.3 $d)$ 4.3

17) $31.671 \div 5.1$
$a)$ 6.21 $b)$ 5.9 $c)$ 6.99 $d)$ 5.32

18) تقريب 5.62681 الى عدد صحيح هو
$a)$ 3 $b)$ 4 $c)$ 5 $d)$ 6

19) تقريب 4.501 الى جزء من عشره هو

$a)$ 4.6 $b)$ 4.5 $c)$ 4 $d)$ 4.501

20) تقريب 2.6315 الى جزء من مائة هو

$a)$ 2.63 $b)$ 2.64 $c)$ 2.631 $d)$ 2

21) النظير الجمعي للعدد $-7$ هو

$a)$ 7 $b)$ $-7$ $c)$ $\frac{1}{7}$ $d)$ $-\frac{1}{7}$

22) النظير الضربي للعدد $-2$ هو

$a)$ 2 $b)$ $-2$ $c)$ $\frac{1}{2}$ $d)$ $-\frac{1}{2}$

23) $5 + 3 - 1 =$

$a)\ 7 \qquad b)\ 4 \qquad c)\ \frac{1}{8} \qquad d)\ -\frac{1}{8}$

24) $4(2 - 5) =$

$a)\ 9 \qquad b)\ -12 \qquad c)\ \frac{1}{8} \qquad d)\ -\frac{1}{8}$

25) $1.12 + 8.26 =$

$a)\ 5.25 \qquad b)\ 5.35 \qquad c)\ 9.38 \qquad d)\ 3.25$

26) $\frac{3}{5}(\frac{1}{4} + \frac{2}{4}) =$

$a)\ \frac{8}{12} \qquad b)\ \frac{2}{3} \qquad c)\ \frac{9}{20} \qquad d)\ \frac{3}{3}$

| نموذج تقييم المتدرب لمستوى أدائه<br>يعبأ من قبل المتدرب نفسه وذلك بعد الانتهاء من تمارين الوحدة | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| بعد الانتهاء من التدرب على وحدة العمليات الحسابية على مجموعة الاعداد الحقيقية والنسبية ، قيم نفسك وقدراتك بواســـطة إكمال هذا التقييم الذاتي بعد كل عنصر من العناصر المذكورة، وذلك بوضع عـــلامة (✓) أمام مستوى الأداء الذي أتقنته، وفي حالة عدم قابلية المهمة للتطبيق ضع العلامة في الخانة الخاصة بذلك. | | | | | |
| م | العناصـــــر | مستوى الأداء (هل أتقنت الأداء) | | | |
| | | غير قابل للتطبيق | لا | جزئيا | كليا |
| 1 | التمييز بين الاعداد الكسرية والاعداد العشرية | | | | |
| 2 | حساب العمليات الحسابية على الاعداد الكسرية | | | | |
| 3 | حساب العمليات الحسابية على الاعداد العشرية | | | | |
| 4 | تقريب الأعداد العشرية | | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | تمييز خصائص الاعداد الحقيقية | | | | |
| 6 | مراعاة العمليات الاولية عند العمليات الحسابية على الاعداد الحقيقية . | | | | |
| يجب أن تصل النتيجة لجميع المفردات (البنود) المذكورة إلى درجة الإتقان الكلي أو أنها غير قابلة للتطبيق، وفي حالة وجود مفردة في القائمة "لا" أو "جزئيا" فيجب إعادة التدرب على هذا النشاط مرة أخرى بمساعدة المدرب. | | | | | |

.

<table>
<tr><td colspan="6">نموذج تقييم المدرب لمستوى أداء المتدرب<br>يعبأ من قبل المدرب وذلك بعد الانتهاء من تمارين الوحدة</td></tr>
<tr><td colspan="2">اسم المتدرب :<br>.......................................................................</td><td colspan="4">التاريخ:<br>.....................................</td></tr>
<tr><td colspan="2">رقم المتدرب :<br>.......................................................................</td><td colspan="4">المحاولة : 1 2 3 4<br>العلامة : ...... ...... ...... ......</td></tr>
<tr><td colspan="6">كل بند أو مفردة يقيم بـ 10 نقاط<br>الحد الأدنى: ما يعادل 80% من مجموع النقاط. الحد الأعلى: ما يعادل 100% من مجموع النقاط.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">م</td><td rowspan="2">بنود التقييم</td><td colspan="4">النقاط ( حسب رقم المحاولات )</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>1</td><td>التمييز بين الاعداد الكسرية والاعداد العشرية</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>حساب العمليات الحسابية على الاعداد الكسرية</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>حساب العمليات الحسابية على الاعداد العشرية</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>تقريب الأعداد العشرية</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>تمييز خصائص الاعداد الحقيقية</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>مراعاة العمليات الاولية عند العمليات الحسابية على الاعداد الحقيقية .</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">المجموع</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="6">ملحوظات:<br>.........................................................................................................................<br>....................<br>توقيع المدرب: ...............................</td></tr>
</table>

# الوحدة الثالثة

# كثيرات الحدود

# الوحدة الثالثة
# كثيرات الحدود

الهدف العام للوحدة:
تهدف هذه الوحدة إلى معرفة كثيرات الحدود والكسور الجبرية واختصارها.

الأهداف التفصيلية:
**من المتوقع في نهاية هذه الوحدة التدريبية أن يكون المتدرب قادراً وبكفاءة على أن:**
1. يُعرف كثيرات الحدود.
2. يحسب العمليات الحسابية على كثيرات الحدود .
3. يحسب قيمة كثيرات الحدود عند نقطة معينة .
4. يحلل كثيرات الحدود.
5. يختصر الكسور الجبرية.

الوقت المتوقع للتدريب على هذه الوحدة: 12 ساعة تدريبية.

## 1.3 كثيرات الحدود:

**تعريف 1.1.3:**

الحد الجبري يكون إما ثابتا أو متغيرا أو حاصل ضرب ثابتاً في متغير واحد أو أكثر بشرط أن يكون أس المتغير عددا صحيحا غير سالب. يسمى الثابت معامل الحد الجبري وتكون درجة الحد الجبري هي حاصل جمع أسس المتغيرات فيه.

**مثال1:** ماهو معامل الحد الجبري $-2x^3y$

الحل:

معامل الحد الجبري هو $-2$ ودرجته تساوي $4$ لان $(3+1=4)$

**2.1.3 الحدود المتشابهة:**

هي الحدود التي تحتوي على نفس المتغير (بما فيها الأس).

**مثال 2 :** $6x^2$ و $4x^2$ حدان متشابهان

$-2x^3$ و $5x^3$ حدان متشابهان

ولكن الحد $3x^2$ لا يشبه الحد $5x$

وكذلك $2x^3$ و $2y^3$ غير متشابهان.

ملاحظة: درجة الحد الثابت دائماً تساوي الصفر $(4x^0 = 4)$

**تعريف 3.1.3:**

كثيرات الحدود هي عبارة عن جمع عدد منته من الحدود الجبرية ودرجتها هي أكبر درجة حد فيها.

### 4.1.3 الشكل العام لكثيرات الحدود للمتغير

إذا كانت $n$ عدد صحيح غير سالب فإن دالة كثيرة الحدود من الدرجة$n$ يمكن كتابتها على الصورة:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 \qquad , a_n \neq 0$$

**مثال3 :**الجدول التالي يبين المعامل الرئيسي، الدرجة، الحدود والمعاملات لكثيرات الحدود :

| كثيرة الحدود | الحدود | الدرجة | المعامل الرئيسي | الحد الثابت | المعاملات |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{4x^2 - 3x + 1}$ | $4x^2, -3x, 1$ | 2 | 4 | 1 | $4, -3, 2,1$ |
| $\mathbf{x^3 - 2}$ | $x^3, -2$ | 3 | 1 | -2 | $1, -2$ |
| $\mathbf{3x^4 - 2x^3}$ | $3x^4, -2x^3$ | 4 | 3 | 0 | $3, -2$ |

**تمرين 3-1:** اختر الإجابة الصحيحة :

1) درجة كثيرة الحدود التالية $4x^2 - 5x + 3$

$a)$ 1 b) 2 c) 3 d) 4

2) المعامل الرئيسي لكثيرة الحدود التالية $4x^2 - 5x + 3$

$a)$ 1 $b)$ 2 $c)$ 3 $d)$ 4

3) الحد الثابت لكثيرة الحدود التالية $4x^2 - 5x + 3$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

2.3 العمليات الحسابية على كثيرات الحدود :

**1.2.3 جمع وطرح كثيرات الحدود:**

عند جمع او طرح كثيرتي حدود فإننا نجمع او نطرح معاملات الحدود المتشابهة.

**مثال 4 :**

$$(3x + 5) + (x - 2) = 3x + x + 5 - 2 = 4x + 3$$

$$(3x + 5) - (x - 2) = 3x - x + 5 - (-2) = 2x + 7$$

**مثال 5 :** اختصر كل من التالي :

$a)\ (2x^2 + 3x + 5) + (x^2 - x + 2)$

$b)\ (3x^2-5x+6)-(2\,x^2+3x-3)$

$c)\ (x^2+4x-1)+(5\,x^2+x)$

الحل :

$a)\ (2x^2+3x+5)+(\,x^2-x+2)=\ 2x^2\ +x^2+3x-x+5+2$

$=\ 3x^2+2x+7$

$b)\ (3x^2-5x+6)-(2\,x^2+3x-3)=3x^2-5x+6-2\,x^2-3x\ \ +3$
$=3x^2-2\,x^2-5x-3x+6+3$
$=x^2-8x\ \ +9$

$c)\ (x^2+4x-1)+(5\,x^2+x)=x^2+5\,x^2+4x+x-1$
$=6\,x^2+5x-1$

**تمرين2-3 :** اختر الإجابة الصحيحة

1) $(5x+3)\ +(2x-1\,)\ =$

$a)\ 7x+3$ $b)\ 3x-1$ $c)\ 7x+2$ $d)\ 3x+2$

2) $(5x+3)-(2x-1\,)\ =$

$a)\ 3x-4$ $b)\ 3x-2$ $c)\ 3x+4$ $d)\ 3x+2$

### 2.2.3 ضرب كثيرة الحدود بعدد حقيقي :

**تعريف:** عند ضرب عدد حقيقي $k$ في كثيرة حدود من الدرجة $n$ فإننا نضرب العدد الحقيقي في جميع معاملات كثيرة الحدود ( خاصية التوزيع ):

$$k(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x^1+a_0)$$
$$=ka_nx^n+ka_{n-1}x^{n-1}+\cdots+ka_1x^1+ka_0$$

**مثال 6:** اختصر مايلي :

$a)\ 3(2x^2+4x\ \ -1)$
$b)-2(5x\ \ -3\,)$

الحل :

$a)\ \ 3(2x^2-4x+1)=(3\cdot2)x^2+(3)(-4)x+(3\cdot1)$
$=6x^2-12x+3$

$b)\ \ -2\,(\,5x-3)=\ (-2)\ \ (5)x+(-2)\cdot(-3)$
$=-10x+6$

**تمرين 3-3:** اختر الإجابة الصحيحة :

1) $5(3x^2+2x-4)=$

$a)\ 15x^2+10x-20$ $\quad b)\ 15x^2+7x+20$

$c)\ 8x^2-7x+9$ $\quad d)\ x^2+10x-20$

2) $-3(x^2-4x)=$

$a)\ -3x^2+12x$ $\quad b)\ -3x^2+x$

$c)\ x^2+12x$ $\quad d)\ -3x^2-12x$

### 3.2.3 ضرب كثيرات الحدود:

**خصائص الأسس :** اذا كان $x, y$ عددين حقيقيين و $m, n$ عددين صحيحين فان:

| الخاصية | مثال |
|---|---|
| 1) $x^0=1 \quad ,x\neq 0$ | $8^0=1$ |
| 2) $x^m\cdot x^n=x^{m+n}$ | $x^2\cdot x^5=x^{2+5}=x^7$<br>$3^1\cdot 3^2=3^{1+2}=3^3=27$ |
| 3) $\dfrac{x^m}{x^n}=x^{m-n} \quad ,x\neq 0$ | $\dfrac{x^6}{x^2}=x^{6-2}=x^4$<br>$\dfrac{5^7}{5^4}=5^{7-4}=5^3$ |
| 4) $x^{-m}=\dfrac{1}{x^m} \quad ,\dfrac{1}{x^{-m}}=x^m \quad x\neq 0$ | $x^{-2}=\dfrac{1}{x^2} \quad ,\dfrac{1}{x^{-2}}=x^2$ |
| 5) $(x^m)^n=x^{m\cdot n}$ | $(x^3)^2=x^{3\cdot 2}=x^6$<br>$(2^2)^4=2^{2\cdot 4}=2^8$ |
| 6) $(x\cdot y)^m=x^m\cdot y^m$ | $(3x)^2=3^2x^2=9x^2$ |

| | |
|---|---|
| 7) $\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m} \qquad ,y \neq 0$ | $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$ |
| 8) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-m} = \left(\frac{y}{x}\right)^m = \frac{y^m}{x^m} \;,\; x \neq 0 \;, y \neq 0$ | $\left(\frac{x}{y}\right)^{-5} = \left(\frac{y}{x}\right)^5 = \frac{y^5}{x^5}$ |

**تعريف :**عند ضرب كثيرتي حدود فإننا نقوم بتوزيع جميع الحدود في القوس الأول على جميع الحدود في القوس الثاني، وبعد ذلك نجمع الحدود المتشابهة إذا أمكن.

**مثال**7 **:** اوجد حاصل ضرب كثيرتي الحدود التالية واكتب الناتج في ابسط صوره اذا امكن :

$$a) \quad (2x^2+3)\,(4x+5)$$
$$b) \quad (x+3)\,(x-2)$$

الحل :

$a) \quad (2x^2+3)\,(4x+5)$
$= 2x^2(4x+5) + 3\,(4x+5)$
$= 2x^2(4x) + 2x^2(5) + 3\,(4x) + 3\,(5)$
$= 8x^3 + 10x^2 + 12x + 15$

$b) \quad (x-2)\,(x+1)$
$= x(x+1) - 2(x+1)$
$= x(x) + x(1) - 2(x) - 2(+1)$
$= x^2 + x - 2x - 2$
$= x^2 - x - 2$

**تمرين**3-4**:** اختر الإجابة الصحيحة :

1) $(x^2+4)\,(2x-2) =$

$a)\ 2x^3-2x^2+8x-8 \qquad b)\ 2x^3-x^2+8x-8$

$c)\ 2x^3-2x^2+x-8 \qquad d)\ 2x^3-2x^2+8x-2$

2) $(3x+1)\,(x+4)$

$a)\ 3x^2+13x+4 \qquad b)\ 3x^2+12x+4$

$c)\ 3x^2 + x + 4$ $\qquad$ $d)\ 3x^2 + 13x + 1$

### 4.2.3 بعض القوانين المشهورة :

| | |
|---|---|
| 1) $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$ | $(x+3)(x-3) = x^2 - 3^2$ |
| 2) $(x+y)^2 = (x+y)(x+y)$<br>$= x^2 + 2xy + y^2$ | $(x+5)^2 = (x+5)(x+5)$<br>$= x^2 + 2 \cdot 5x + 5^2$<br>$= x^2 + 10x + 25$ |
| 3) $(x-y)^2 = (x-y)(x-y)$<br>$= x^2 - 2xy + y^2$ | $(x-5)^2 = (x-5)(x-5)$<br>$= x^2 - 2 \cdot 5x + 5^2$<br>$= x^2 - 10x + 25$ |
| 4) $(x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y)$<br>$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ | $(x+5)^3 = (x+5)(x+5)(x+5)$<br>$= x^3 + 3x^2 \cdot 5 + 3x \cdot 5^2 + 5^3$<br>$= x^3 + 15x^2 + 75x + 125$ |
| 4) $(x-y)^3 = (x-y)(x-y)(x-y)$<br>$= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ | $(x-5)^3 = (x-5)(x-5)(x+5)$<br>$= x^3 + 3x^2(-5) + 3x(-5)^2 + (-5)$<br>$= x^3 - 15x^2 + 75x - 125$ |

### 5.2.3 حساب كثيرة حدود عند قيمة معينة:

لحساب قيمة كثيرة الحدود عند قيمة معينة للمتغير نعوض المتغير في كثيرة الحدود بهذه القيمة.

**مثال 8:** احسب قيمة كثيرة الحدود عند قيم المتغير $x$ المعطاة:

| كثيرة الحدود | قيم $x$ | الحل |
|---|---|---|
| $x^2 + 4x - 1$ | $x = 0$ | $(0)^2 + 4(0) - 1 = 0 + 0 - 1 = -1$ |
| $4x^3 + 2$ | $x = 1$ | $4(1)^3 + 2 = 4(1) + 2 = 4 + 2 = 6$ |
| $2x - 3$ | $x = 2$ | $2(2) - 3 = 4 - 3 = 1$ |
| $3x^2 - 1$ | $x = -3$ | $3(-3)^2 - 1 = 3(9) - 1 = 27 - 1 = 26$ |

**تمرين3-5:** اختر الإجابة الصحيحة :

1 - قيمة $2x+4$ عند $x=3$

$a)\ 8 \qquad b)\ 10 \quad c)\ 6 \qquad d)\ 4$

1 - قيمة $2x^2+1$ عند $x=-1$

$a)\ 3 \qquad b)\ 5 \quad c)\ -3 \qquad d)\ -1$

### 6.2.3 قسمة كثيرات الحدود :

قسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود آخرى تشبه عملية القسمة المطولة في الاعداد الصحيحة

**مثال 9 :** اوجد حاصل قسمة $6x^2+8x+2$ على $2x+2$ ؟

الحل :

$$\begin{array}{r|l} & 3x+1 \\ \hline 2x+2 & 6x^2+8x+2 \\ & \underline{6x^2+6x} \\ & \quad\quad\ 2x+2 \\ & \quad\quad\ \underline{2x+2} \\ & \quad\quad\quad\ 0 \end{array}$$

**تمرين3-6:** اختر الإجابة الصحيحة :

1) $(2x^2+11x+12) \div (2x+3) =$

$a)\ x+4 \qquad b)\ 2x+4 \qquad c)\ 2x \qquad d)\ x-4$

### 3.3 تحليل كثيرات الحدود

يستخدم التحليل لحل المعادلات الجبرية عادة، وهو يعني كتابة كثيرة الحدود على شكل حاصل ضرب كثيرتي حدود أو أكثر تقل درجتهما عن درجة كثيرة الحدود الأصلية، ويُطلق على كل كثيرة حدود ناتج من عملية التحليل اسم العامل، ولا يمكن تحليل أي عامل من هذه العوامل أبداً، كما يساوي حاصل ضرب جميع العوامل كثيرة الحدود الأصلية دائماً.

### 1.3.3 طريقة المعامل المشترك الأكبر:

تم التحليل من خلال هذه الطريقة باستخراج الثوابت أو المتغيرات المشتركة بين جميع الحدود لتكوّن هذه الثوابت والمتغيرات حدّاً يُعرف بالعامل المشترك الأكبر.

**مثال10:** حلل كثيرات الحدود التالية باستخدام المعامل المشترك الأكبر

$a)\ 6x^2 + 8x^4 \qquad b)\ 3x^7 - x^3y^4$

الحل :

$a)\ 6x^2 + 8x^4$

العامل المشترك الأكبر بين الحدين الجبريين $8x^4$ و $6x^2$ هو $2x^2$ وبالتالي :

$$6x^2 + 8x^4 = 2x^2\left(\frac{6x^2}{2x^2} + \frac{8x^4}{2x^2}\right) = 2x^2(3 + 4x^2)$$

$b)\ 3x^7 - x^3y^4$

العامل الشترك الأكبر بين الحدين الجبريين $-x^3y^4$ و $3x^6$ هو $x^3$ وبالتالي :

$$3x^7 - x^3y^4 = x^3\left(\frac{3x^7}{x^3} - \frac{x^3y^4}{x^3}\right) = x^3(3x^4 - y^4)$$

**تمرين3-7:** اختر الإجابة الصحيحة مما يلي :

1) $(2x^2 + 12x)$ تحليل كثيرة الحدود

$a)\ 2x\,(x+6) \qquad b)\ 2\,(x+6) \qquad c)\ 2x\,(x+6x) \qquad d)\ x\,(x+6)$

2) $(4x^2y + 8xy)$ تحليل كثيرة الحدود

$a)\ 4xy\,(x+2) \qquad b)\ 2xy\,(xy+4) \qquad c)\ 4y\,(x+8x) \qquad d)\ xy\,(x+8y)$

### 2.3.3 تحليل كثيرة حدود من الدرجة الثانية :

**تحليل فرق مربعين :**

$$(x^2 - y^2) = (x-y)(x+y)$$

**مثال11:** حلل كثيرات الحدود التالية :

$a)\ x^2 - 16 \qquad b)\ y^2 - 4 \qquad c)\ 9 - x^2$

الحل:

$a)\ x^2 - 16 = (x-4)(x+4)$

$b)\ y^2 - 4 = (y-2)(y+2)$

$c)\ 9 - x^2 = (3-x)(3+x)$

**تمرين3-8:** اختر الإجابة الصحيحة امما يلي :

1) $x^2 - 25$

$a)\ (x-5)(x+5) \qquad b)\ (x-4)(x+4)$

$c)\ (x-25)(x+1) \qquad d)\ (5-x)(5+x)$

2) $x^2-1$

$a)\ (x-1)(x+2)$ $b)\ (x-1)(x+1)$
$c)\ (x-2)(x+1)$ $d)\ (1-x)(1+x)$

3) $81-x^2$

$a)\ (x-81)(x+1)$ $b)\ (x-9)(x+9)$
$c)\ (9-x)(9+x)$ $d)\ (81-x)(1+x)$

## تحليل كثيرة حدود على الصورة $ax^2+bx+c$

**<u>الحالة الأولى:</u>** $a=1$

في هذه الحالة يجب ان نوجد كثيرتي حدود بحيث يكون حاصل ضرب حديهما الأول يساوي $x^2$ وحاصل ضرب حديهما الثاني يساوي $c$ وجمعهما الجبري يساوي $b$

**مثال12:** حلل كثيرات الحدود التالية :

$a)\ x^2+5x+6$ $b)\ x^2-6x+8$ $c)\ x^2+x-12$

الحل :

$a)\ \boldsymbol{x^2+5x+6}$

في هذه الحاله نبحث عن عددين حاصل ضربهما يساوي $6$ ومجموعهما الجبري يساوي $5$
العددين هما $2$ و $3$

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$$

$b)\ \boldsymbol{x^2-6x+8}$

نبحث عن عددين حاصل ضربهما يساوي $8$ ومجموعهما الجبري يساوي $-6$
العددين هما $-2$ و $-4$

$$x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$$

$c)\ \boldsymbol{x^2+x-12}$

نبحث عن عددين حاصل ضربهما يساوي $-12$ ومجموعهما الجبري يساوي $+1$

العددين هما 4 و $-3$

$$x^2+x-12=(x-3)(x+4)$$

**تمرين3-9:** اختر الإجابة الصحيحة مما يلي :

1) $(x^2+7x+10)$ تحليل كثيرة الحدود

$a)\ (x+2)(x+5)$ $\quad b)\ (x+1)(x+10)$

$c)\ (x-2)(x-5)$ $\quad d)\ (x+2)(x-5)$

2) $(x^2-8x+15)$ تحليل كثيرة الحدود

$a)\ (x+3)(x+5)$ $\quad b)\ (x-3)(x-5)$

$c)\ (x+3)(x-5)$ $\quad d)\ (x-3)(x+5)$

3) $(x^2-4x-12)$ تحليل كثيرة الحدود

$a)\ (x+2)(x+6)$ $\quad b)\ (x-2)(x-6)$

$c)\ (x+2)(x-6)$ $\quad d)\ (x+2)(x-5)$

**<u>الحالة الثانية:</u>** $a\neq 1$

في هذه الحاله نبحث عن أربعة اعداد صحيحة $m,n,p,q$ *تستوفي الشروط الثلاثة التالية:*

1) $mn=a$ $\quad$ 2) $pq=c$ $\quad$ 3) $mq+np=b$

وعند إيجاد هذه الاعداد يكون التحليل كما يلي :

$$ax^2+bx+c=(mx+p)(nx+q)$$

مع ملاحظة ان إشارة العددين $q$ و $p$ تكون نفس إشارة العدد $b$ اذا كان $c>0$ ومختلفتان اذا كان $c<0$ يتم اختيار العددين $n$ و $m$ على أساس الشرط الأول ويتم اختيار العددين $q$ و $p$ على أساس الشرط الثاني ثم نستخدم الشرط الثالث للتاكد من صحة الاعداد $m,n,p,q$

**مثال13:** حلل كثيرات الحدود التالية :

$a)\ \ 3x^2+5x+2$ $\quad b)\ 10\,x^2-27x+5$

الحل :

$a)\ \ \boldsymbol{3x^2+5x+2}$

نبحث عن أربعة اعداد صحيحة $m,n,p,q$ *تستوفي الشروط الثلاثة التالية:*

1) $mn=3$ $\quad$ 2) $pq=2$ $\quad$ 3) $mq+np=5$

$$3x^2+5x+2=(3x+2)(x+1)$$

$b)\ \ \mathbf{10\,x^2 - 27x + 5}$

نبحث عن أربعة اعداد صحيحة $m\,, n\,, p\,, q$ *تستوفي الشروط الثلاثة التالية:*

$1)\ mn = 10 \qquad 2)\ pq = 5 \qquad 3)\ mq + np = -27$

$$10\,x^2 - 27x + 5 = (2x-5)(5x-1)$$

**تمرين3-10:** اختر الإجابة الصحيحة مما يلي :

$1)\ \ (8x^2 - 2x - 15)$ تحليل كثيرة الحدود

$a)\ (2x-3)(4x+5) \qquad b)\ (2x+3)(4x-5)$
$c)\ (2x-2)(4x-4) \qquad d)\ (2x+3)(4x+5)$

$2)\ \ (8x^2 + 2x - 3)$ تحليل كثيرة الحدود

$a)\ (4x+3)(2x-1) \qquad b)\ (4x+2)(2x-4)$
$c)\ (4x-3)(2x-1) \qquad d)\ (4x-2)(2x+4)$

3 . 4 الكسور الجبريه :

الكسر الجبري هو عبارة عن قسمة كثيرتي حدود ، ويعامل الكسر الجبري كما تعاملنا مع الكسور النسبيه في الوحدة السابقة.

اختصار الكسور الجبريه :

عملية اختصار الكسر الجبري هو حذف الحدود المشتركه في البسط والمقام ، فان عملية الاختصار تتطلب منا الادراك الجيد بعمليات التحليل التي سبق دراستها في هذه الوحدة.

**مثال 14:** اختصر مايلي :

$a)\ \dfrac{x^2+5x+6}{x^2-9} \qquad b)\ \dfrac{x+4}{x^2+2x-8}$

$c)\ \dfrac{x^2-5x+6}{x^2+x-2} \cdot \dfrac{x-1}{x-2}$

الحل : نقوم بتحليل البسط والمقام اذا امكن وبعدها نحذف الحدود المشتركه

$$a)\ \frac{x^2+5x+6}{x^2-9}=\frac{(x+2)(x+3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{(x+2)}{(x-3)}$$

$$b)\ \frac{x+4}{x^2+2x-8}=\frac{x+4}{(x+4)(x-2)}$$

$$c)\ \frac{x^2-5x+6}{x^2+x-2}\cdot\frac{x-1}{x-2}=\frac{(x^2-5x+6)(x-1)}{(x^2+x-2)(x-2)}$$
$$=\frac{(x-2)(x-3)(x-1)}{(x+2)(x-1)(x-2)}=\frac{x-3}{x+2}$$

**تمرين3-11:** اختر الإجابة الصحيحة مما يلي :

$$1)\ \frac{x^2+7x+10}{x^2+9+20}$$

$a)\ \frac{x+2}{x+4}$ $\quad b)\ \frac{x-2}{x-4}$ $\quad c)\ \frac{x+10}{x+20}$ $\quad d)\ \frac{x-10}{x-20}$

$$2)\ \frac{x^2-4x-21}{x^2+8x+15}$$

$a)\ \frac{x+2}{x+4}$ $\quad b)\ \frac{x-7}{x+5}$ $\quad c)\ \frac{x+10}{x+20}$ $\quad d)\ \frac{x-10}{x-20}$

$$3)\ \frac{x^2+12x+7}{x^2-9}\div\frac{x+4}{x+3}$$

$a)\ \frac{x+3}{x-3}$ $\quad b)\ \frac{x+4}{x-4}$ $\quad c)\ \frac{x+7}{x-7}$ $\quad d)\ \frac{x+12}{x-9}$

# تمارين (3-12)

1) درجة كثيرة الحدود التالية $4x^2 - 5x + 3$ هي

a) 1 b) 2 c) **3** d) 4

2) المعامل الرئيسي لكثيرة الحدود التالية $4x^2 - 5x + 3$ هو

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

3) الحد الثابت لكثيرة الحدود التالية $4x^2 - 5x + 3$ هو

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

4) ناتج $(5x + 3) + (2x - 1)$ هو

a) $7x + 3$ b) $3x - 1$ c) $7x + 2$ d) $3x + 2$

5) ناتج $(5x + 3) - (2x - 1)$ هو

a) $3x - 4$ b) $3x - 2$ c) $3x + 4$ d) $3x + 2$

6) ناتج $3\,(5x - 2)$ هو

a) $15x - 2$ b) $15x - 6$ c) $15x + 6$ d) $15x - 3$

7) ناتج $(3x^2 + 2)\,(2x + 1)$ هو

a) $6x^3 + 3x^2 + 4x + 2$ b) $6x^3 + 3x^2 + 2$ c) $3x^2 + 4x + 2$ d) $6x^3 + 2$

8) قيمة كثيرة الحدود $2x + 1$ عند القيمة $x = 2$ هي

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

9) قيمة كثيرة الحدود $3x - 2$ عند القيمة $x = -2$ هي

a) 2 b) 3 c) 4 d) $-8$

10) ناتج $(x - 3)\,(x + 2)$ هو

a) $x^2 - x - 6$ b) $x^2 - 5x - 6$ c) $x^2 - x - 2$ d) $2x^2 - 2x - 2$

11) حاصل قسمة $6x^2 + 8x + 2$ على $2x + 2$ يساوي

a) $2x + 2$ b) $x + 1$ c) $x + 3$ d) $3x + 1$

12) حاصل قسمة $4x^2 + 11x + 6$ على $4x + 3$ يساوي

$3x + 3$ $x + 4$ $x + 2$ $4x + 2$

13) تحليل كثيرة الحدود $3x^5 + 6x^2$ هو

a) $3x^2(x^3 + 2)$ b) $x^2(x^3 + 3)$ c) $3x(x + 2)$ d) $3(x^3 + 2)$

14) تحليل كثرة الحدود $x^2 - 9$ هو

a) $(x + 3)(x + 3)$ b) $(x - 3)(x - 3)$ c) $(x + 3)(x - 3)$ d) $(x + 9)(x + 1)$

15) تحليل كثرة الحدود $x^2 + 6x + 8$ هو

a) $(x + 2)(x + 4)$ b) $(x - 2)(x - 4)$ c) $(x - 2)(x + 4)$ d) $(x + 2)(x - 4)$

16) تحليل كثرة الحدود $x^2 - 7x + 10$ هو

a) $(x - 2)(x - 5)$ b) $(x - 2)(x + 5)$ c) $(x + 2)(x + 5)$ d) $(x + 2)(x - 5)$

17) تحليل كثرة الحدود $x^2 + x - 6$ هو

a) $(x - 2)(x - 3)$ b) $(x + 2)(x - 3)$ c) $(x + 2)(x + 3)$ d) $(x - 2)(x + 3)$

18) تحليل كثرة الحدود $= x^2 - 3x - 10$ هو

a) $(x - 5)(x + 2)$ b) $(x - 5)(x - 2)$ c) $(x + 5)(x - 2)$ d) $(x - 5)(x + 2)$

19) تحليل كثرة الحدود $= 6x^2 + 17x + 12$ هو

a) $(2x + 2)(x + 4)$ b) $(2x + 3)(3x + 4)$ b) $(x + 3)(x + 4)$ c) $(x + 2)(x + 3)$

20) تحليل كثرة الحدود $= 2x^2 + 7x + 3$ هو

a) $(x + 3)(2x + 1)$ b) $(x + 3)(x + 1)$ c) $(x + 2)(2x + 3)$ d) $(3x + 3)(2x + 3)$

21) اختصار $\frac{x^2+6x+8}{x^2-16}$ يساوي

a) $\frac{(x-4)}{(x-4)}$ b) $\frac{(x+4)}{(x-4)}$ c) $\frac{(x+2)}{(x-4)}$ d) $\frac{(x+6)}{(x-4)}$

22) اختصار $\frac{x^2-x-6}{x^2-3x-10}$ يساوي

a) $\frac{(x+3)}{(x+5)}$ b) $\frac{(x-3)}{(x-5)}$ c) $\frac{(x-5)}{(x-3)}$ d) $\frac{(x+3)}{(x+5)}$

<table>
<tr><td colspan="6">نموذج تقييم المتدرب لمستوى أدائه<br>يعبأ من قبل المتدرب نفسه وذلك بعد الانتهاء من تمارين الوحدة</td></tr>
<tr><td colspan="6">بعد الانتهاء من التدرب على وحدة كثيرات الحدود، قيم نفسك وقدراتك بواسطة إكمال هذا التقييم الذاتي بعد كل عنصر من العناصر المذكورة، وذلك بوضع علامة (✓) أمام مستوى الأداء الذي أتقنته، وفي حالة عدم قابلية المهمة للتطبيق ضع العلامة في الخانة الخاصة بذلك.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">م</td><td rowspan="2">العناصـــر</td><td colspan="4">مستوى الأداء (هل أتقنت الأداء)</td></tr>
<tr><td>غير قابل للتطبيق</td><td>لا</td><td>جزئيا</td><td>كليا</td></tr>
<tr><td>1</td><td>تعريف كثيرات الحدود</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>حساب العمليات الحسابية على كثيرات الحدود</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>حساب قيمة كثيرات الحدود عند نقطة معينة</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>تمييز طرق تحليل كثيرات الحدود</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>تحليل كثيرات الحدود</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>اختصار الكسور الجبرية</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="6">يجب أن تصل النتيجة لجميع المفردات (البنود) المذكورة إلى درجة الإتقان الكلي أو أنها غير قابلة للتطبيق، وفي حالة وجود مفردة في القائمة "لا" أو "جزئيا" فيجب إعادة التدرب على هذا النشاط مرة أخرى بمساعدة المدرب.</td></tr>
</table>

نموذج تقييم المدرب لمستوى أداء المتدرب

يعبأ من قبل المدرب وذلك بعد الانتهاء من تمارين الوحدة

اسم المتدرب : ............................................................................ التاريخ: ....................................

رقم المتدرب : ............................................................................ المحاولة : 1 2 3 4 العلامة : ...... ...... ...... ......

كل بند أو مفردة يقيم بـ 10 نقاط

الحد الأدنى: ما يعادل 80% من مجموع النقاط. الحد الأعلى: ما يعادل 100% من مجموع النقاط.

| م | بنود التقييم | النقاط ( حسب رقم المحاولات ) | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | تعريف كثيرات الحدود | | | | |
| 2 | حساب العمليات الحسابية على كثيرات الحدود | | | | |
| 3 | حساب قيمة كثيرات الحدود عند نقطة معينة | | | | |
| 4 | تمييز طرق تحليل كثيرات الحدود | | | | |
| 5 | تحليل كثيرات الحدود | | | | |
| 6 | اختصار الكسور الجبرية | | | | |
| المجموع | | | | | |

ملحوظات:

..........................................................................................................................................

..................

توقيع المدرب: ..............................

# الوحدة الرابعة

## المصفوفات والمحددات

# الوحدة الرابعة

الهدف العام للوحدة:
تهدف هذه الوحدة إلى معرفة المصفوفات والمحددات والقدرة على أداء العمليات على المصفوفات وحساب المحددات.

الأهداف التفصيلية:
**من المتوقع في نهاية هذه الوحدة التدريبية أن يكون المتدرب قادراً وبكفاءة على أن:**

1. يُعرف المصفوفات .
2. يميز رتبة المصفوفات .
3. يميز أنواع المصفوفات .
4. يحسب العمليات الحسابية على المصفوفات.
5. يحسب المحددات.
6. يحسب مقلوب المصفوفة.

**الوقت المتوقع للتدريب على هذه الوحدة:** 12ساعة تدريبية.

# المصفوفات

## 1.4 مفهوم المصفوفة وانواعها:

**1.1.4 تعريف المصفوفة:** هي عبارة عن مجموعة من الأعداد او الرموز مرتبة على شكل صفوف واعمدة مكتوبة بين [ ] ، ويرمز لاسم المصفوفة بأحد احرف الإنجليزية الكبيرة $A\ ,B\ ,C, D, \ldots$ كما في الشكل التالي:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

حيث ان عدد الصفوف يرمز له بالرمز $m$ وعدد الاعمدة يرمز له بالرمز $n$

**2.1.4 رتبة المصفوفة:**

رتبة المصفوفة $A =$ عدد الصفوف $m$ $\times$ عدد الاعمدة $n$

رتبة المصفوفة $A = m \times$

$n$

**مثلاً:**

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{عمود 1} & \text{عمود 2} \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ A = & \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 1 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{صف 1} \\ \leftarrow \text{صف 2} \\ \leftarrow \text{صف 3} \end{array} \end{array}$$

رتبة المصفوفة $A = 3 \times 2$

ملاحظة: قيمة العنصر $a_{31}$ يساوي 5

**مثال1:** أوجد رتب المصفوفات التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 8 & -5 \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

الحل:

رتبة المصفوفة $A = 2 \times 3$

رتبة المصفوفة $B = 2 \times 2$

رتبة المصفوفة $C = 3 \times 2$

رتبة المصفوفة $D = 1 \times 3$

**تمرين 1-4 :** اختر الإجابة الصحيحة:

1- رتبة المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

a) 3×2 b) 2×3 c) 3×3 d) 2×2

2- قيمة العنصر $b_{22}$ في المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

a) 3 b) 2 c) $-3$ d) 0

3- رتبة المصفوفة $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$

a) 2×3 b) 3×1 c) 3×2 d) 2×2

4- قيمة العنصر $a_{22}$ فى المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

a) 3 b) -1 c) 1 d) 0

## 3.1.4 أنواع المصفوفات :

1- **المصفوفة الصفية :** هي المصفوفة التي تتكون من صف واحد فقط.

مثلاً $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \end{bmatrix}_{1\times 3}$

2- **المصفوفة العمودية:** هي المصفوفة التي تتكون من عمود واحد فقط.

مثلاً: $\begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}_{2\times 1}$

3- **المصفوفة المربعة** : هي مصفوفة عدد صفوفها يساوى عدد اعمدتها.

مثلاً: $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ ، $\begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

4- **المصفوفة الصفرية** : هي المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار.

مثلاً: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ ، $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

5- **المصفوفة القطرية:** هي مصفوفة مربعه جميع عناصرها تساوى صفر ماعدا القطر الرئيسي

القطر الرئيسي

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

6- **مصفوفة الوحدة** : هي مصفوفة مربعه جميع عناصرها تساوى صفر ماعدا القطر الرئيسي يساوى واحد. ويرمز لها بالرمز $I_n = I_{n\times n}$

مثلاً: $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ ، $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

**مثال 2:** حدد نوع المصفوفات التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل:

نوع المصفوفة $A$ : مصفوفة عمودية .

نوع المصفوفة $B$ : مصفوفة الوحدة $I_3$ .

نوع المصفوفة $C$ : مصفوفة قطرية .

**تمرين4-2:** اختر الإجابة الصحيحة:

1- نوع المصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$d)$ عمودية    $c)$ صفية    $b)$ صفرية    $a)$ مربعة

2- نوع المصفوفة $\begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix}$

$d)$ عمودية    $c)$ صفية    $b)$ صفرية    $a)$ مربعة

3- مصفوفة الوحدة

$a) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad d) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

### 4.1.4 تساوى مصفوفتين:

نقول عن المصفوفة $A$ تساوي المصفوفة $B$ إذا تحقق الشرطين:

1- إذا كانتا من نفس الرتبة.

**2-** عناصرهما المتناظرة متساوية.

مثلاً $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

**مثال3:** هل المصفوفتين $A$ و $B$ متساويتين ؟ و لماذا ؟

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

الحل: نعم، المصفوفة $A$ تساوى المصفوفة $B$ لان لهما نفس الرتبة $2\times2$ وعناصرهما المتناظرة متساوية .

**مثال 4:** هل المصفوفتين $A$ و $B$ متساويتين ؟ و لماذا ؟

$$A=\begin{bmatrix}3 & 9\\ 0 & 5\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}3 & 9\\ 1 & 5\end{bmatrix}$$

الحل: لا ، لأن المصفوفتان $A$ و $B$ غير متساويان لان احد عناصرهما المتناظرة غير متساوية $(\,0\neq1\,)$ ، مع العلم ان لهما نفس الرتبة.

**مثال 5:** أوجد قيمة $x$ التى تجعل المصفوفتين A و B متساوية

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\ 3 & 4 & 7\end{bmatrix} \;, B=\begin{bmatrix}x & 2 & 5\\ 3 & 4 & 7\end{bmatrix}$$

الحل: نلاحظ ان المصفوفتين A وB لهما نفس الرتبة $2\times3$ وان جميع عناصرهما المتناظرة متساوية وبالتالي فان قيمة $x=1$

**تمرين4-3:** اختر الإجابة الصحيحة:

-1 قيمة $x$ التي تجعل المصفوفتين $\begin{bmatrix}2 & 4\\ 1 & x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{bmatrix}$

$a)\ 2 \qquad b)\ 4 \qquad c)\ 1 \qquad d)\ 3$

-1 قيمة $x$ و $y$ التي تجعل المصفوفتين $\begin{bmatrix}2 & x & 6\\ 1 & 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4 & -3\\ 0 & y & 2\end{bmatrix}$

$a)\ x=4\ ,y=3 \qquad b)\ x=1\ ,y=2 \qquad c)\ x=0\ ,y=1$
$d)\ x=3\ ,y=4$

2.4 العمليات الحسابية على المصفوفات :

**1.2.4جمع و طرح المصفوفات :**

لجمع أو طرح مصفوفتين لهما الرتبة نفسها فإننا نجمع أو نطرح العناصر المتناظرة للمصفوفتين.

مثلاً
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \pm e & b \pm f \\ c \pm g & d \pm h \end{bmatrix}$$

**مثال 6:** إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$

أوجد كلا مما يأتي إذا امكن:

$a) \quad A + B \qquad b)\ A - B \qquad c)\ B + C$

الحل:

$$a)\ A + B = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7+0 & 5+(-2) \\ -2+5 & 1+4 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$b)\ A - B = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-0 & 5-(-2) \\ -2-5 & 1-4 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}$$

$$c)\ B + C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

لا يمكن إجراء عملية الجمع لان المصفوفتين ليس لهما نفس الرتبة

**تمرين4-4:** اختر الإجابة الصحيحة :

1- إذا كانت $B = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$ , $A = \begin{bmatrix} 16 & 2 \\ -9 & 8 \end{bmatrix}$ فإن $A + B$ تساوى

a) $\begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -12 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 12 & 3 \\ -9 & 16 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 20 & 3 \\ -12 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 12 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$

2- إذا كانت $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ , $A = \begin{bmatrix} 12 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ فإن $A - B$ تساوى

a) $\begin{bmatrix} 14 & -3 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 12 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 12 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -12 & 1 \end{bmatrix}$

3- إذا كانت $B = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -9 & 7 \end{bmatrix}$ فإن $A + B$ تساوى .......

a) لا يمكن b) $\begin{bmatrix} 10 & 9 \\ -10 & 6 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 10 & 4 \\ -10 & 7 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix}$

### 2.2.4ضرب المصفوفة في عدد حقيقي أو القسمة عليه :

عند ضرب مصفوفة في عدد حقيقي أو القسمة عليه فإننا نضرب العدد في جميع عناصر المصفوفة أو نقسم جميع عناصر المصفوفة على العدد .

مثلاً

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow k\,\mathrm{A} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{A}{k} = \begin{bmatrix} \frac{a}{k} & \frac{b}{k} \\ \frac{c}{k} & \frac{d}{k} \end{bmatrix}$$

**مثال7 :** إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ أوجد كلا مما يأتي:

$a)\ 2A$ $\qquad b)\ 2A + B$ $\qquad c)\ \dfrac{B}{2}$

الحل:

$$a)\ 2A = 2\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 2 & 2\times 8 \\ 2\times 1 & 2\times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$b)\ 2A + B = 2\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 4 & 14 \end{bmatrix}$$

$$c)\ \frac{B}{2} = \frac{\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}}{2} = \begin{bmatrix} \frac{6}{2} & \frac{-4}{2} \\ \frac{2}{2} & \frac{8}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

**تمرين4-5:** إختر الإجابة الصحيحة :

1- إذا كانت $B= \begin{bmatrix} 8 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & -2 \end{bmatrix}$ فإن $-4B$ تساوى

a) $\begin{bmatrix} -32 & 0 & -12 \\ 4 & 16 & 8 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -32 & -4 & -12 \\ 4 & -16 & -8 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 8 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 8 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 4 & -4 & -1 \\ -5 & -8 & -6 \end{bmatrix}$

2- إذا كانت $B = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ ، فإن $\frac{B}{-2}$ تساوى .

a) $\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -16 & 12 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$

3- إذا كانت $B = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ , $A = \begin{bmatrix} 5 & 13 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ، فإن $2A + 3B$ تساوى

a) $\begin{bmatrix} 4 & 56 \\ 15 & -2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 23 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -10 & 13 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

4- إذا كانت $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & -3 \end{bmatrix}$ , $A = \begin{bmatrix} 5 & 13 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ، فإن $2A - 3B$ تساوى

a) لا يمكن b) $\begin{bmatrix} 9 & 18 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 9 & 5 & 15 \\ 4 & 7 & -4 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$

### 3.2.4 ضرب المصفوفات

**ضرب صف في عمود:**

حاصل ضرب صف في عمود له عدد العناصر نفسه هو مجموع حاصل ضرب كل عنصر من الصف في العنصر الموافق له من العمود و هذا الضرب ليس تبديليا.

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = [a \times c + b \times d]$$

فمثلا

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = [2 \times 1 + 4 \times 3] = [2 + 12] = [14]$$

لا يمكن حسابها لان عدد عناصر الصف لا تساوي عدد عناصر العمود $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

**ضرب مصفوفتين:**

حاصل ضرب مصفوفة من الرتبة $m \times n$ في مصفوفة من الرتبة $n \times k$ ( أي ان عدد أعمدة المصفوفة الأولى تساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية) هي مصفوفة من الرتبة $m \times k$ وكل عنصر من عناصرها هو حاصل ضرب الصف الموافق له من المصفوفة الأولى في العمود الموافق له من المصفوفة الثانية.

فمثلا:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$$

$$A_{m\times n} \quad \cdot \quad B_{n\times k}$$

متساوية$(n = n)$

رتبة المصفوفة $AB$ هي

$m \times k$

**مثال 8:** أوجد رتبة المصفوفة $A \cdot B$ :

$b)\ \ A_{5\times3} \cdot B_{3\times4} \qquad\qquad a)\ \ A_{3\times4} \cdot B_{4\times2}$

الحل:

$a)\quad 3\times 2$

$b)\quad 5\times 4$

**تمرين 4-6:** اختر الإجابة الصحيحة :

1- رتبة المصفوفة الناتجة من ضرب المصفوفتين $A_{4\times6} \cdot B_{3\times2}$ هي :

$a)\ 4\times2 \qquad b)\ 6\times3 \qquad c)\ 4\times3$ $\qquad$ d) لا يمكن

2- رتبة المصفوفة الناتجة $A_{3\times4} \cdot B_{4\times4}$ هي :

$a)\ 4\times2 \qquad b)\ 6\times3 \qquad c)\ 3\times4$ $\qquad$ d) لا يمكن

**مثال 9:** أوجد حاصل $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

الحل:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [2 \quad 3]\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} & [2 \quad 3]\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} \\ [1 \quad 4]\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} & [1 \quad 4]\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times 5 + 3 \times 7 & 2 \times 6 + 3 \times 8 \\ 1 \times 5 + 4 \times 7 & 1 \times 6 + 4 \times 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 + 21 & 12 + 24 \\ 5 + 28 & 6 + 32 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 31 & 36 \\ 33 & 38 \end{bmatrix}$$

**مثال 10:** إذا كانت $B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

أوجد ناتج كل مما يلي :

$a)\ A \cdot B \qquad b)\ B \cdot A \qquad c)\ A \cdot C \qquad d)\ C \cdot B$

الحل:

$$a)\ A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times 2 + 8 \times 1 & 2 \times 8 + 8 \times (-3) \\ 1 \times 2 + 3 \times 1 & 1 \times 8 + 3 \times (-3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 + 8 & 16 + (-24) \\ 2 + 3 & 8 + (-9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -8 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$b)\quad B\cdot A=\begin{bmatrix}2 & 8\\ 1 & -3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 8\\ 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+8 & 16+24\\ 2+(-3) & 8+(-9)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}12 & 40\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$c)\quad A\cdot C=\begin{bmatrix}2 & 8\\ 1 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 0 & 4\\ 6 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix}2\times 2+8\times 6 & 2\times 0+8\times 1 & 2\times 4+8\times(-2)\\ 1\times 2+3\times 6 & 1\times 0+3\times 1 & 1\times 4+3\times(-2)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4+48 & 0+8 & 8+(-16)\\ 2+18 & 0+3 & 4+(-6)\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}52 & 8 & -8\\ 20 & 3 & -2\end{bmatrix}$$

$$d)\quad C\cdot B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 4\\ 6 & 1 & -2\end{bmatrix}_{2\times 3}\cdot\begin{bmatrix}2 & 8\\ 1 & -3\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

غير معرفه لان عدد أعمدة المصفوفة $C$ لا تساوى عدد صفوف المصفوفة $B$

**<u>لاحظ أن :</u>**

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}12 & -8\\ 5 & -1\end{bmatrix}\quad\neq\quad B\cdot A=\begin{bmatrix}12 & 40\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

أي أن $A\cdot B\neq B\cdot A$ (عملية الضرب ليس ابدالي في المصفوفات)

**تمرين4-7:** اختر الإجابة الصحيحة :

-1 إذا كانت $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$ , $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ فان $A \cdot B$ تساوي

$a) \begin{bmatrix} 34 & 32 \\ 26 & 28 \end{bmatrix}$ $b) \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$ $c) \begin{bmatrix} 34 & -32 \\ 26 & 24 \end{bmatrix}$ $d) \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$

-2 إذا كانت $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}$ , $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ فان $A \cdot B$ تساوي

$a) \begin{bmatrix} 12 \\ -21 \end{bmatrix}$ $b) \begin{bmatrix} -6 \\ 18 \end{bmatrix}$ $c) \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}$ $d) \begin{bmatrix} -6 & -9 \\ 30 & -6 \end{bmatrix}$

## الـمــــحــددات

3.4 المحددات

1.3.4 إذا كانت $A$ مصفوفة مربعة فإن محدد المصفوفة $A$ هو عبارة عن عدد حقيقي ونرمز لمحدد المصفوفة $A$ بالرمز $|A|$

**2.3.4 حساب المحددات $2 \times 2$**

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

مثلاً :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow |A| = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = (4 \times 6) - (5 \times 3)$$

$$= 24 - 15 = 9$$

**مثال 11:** أوجد قيمة كل محدده المصفوفات التالية إذا امكن:

$a) \ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ $b) \ B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$

الحل:

$$a) \ |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = (2 \times 3) - (1 \times -4) = 6 - (-4) = 6 + 4 =$$

$$= 10$$

$$b) \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

لا يمكن حساب المحددة لأن المصفوفة ليست مربعة

**تمرين4-8:** اختر الإجابة الصحيحة :

1- محددة $\begin{vmatrix} -6 & -7 \\ 10 & 8 \end{vmatrix}$ تساوى

a) $22$ b) $10$ c) $-6$ d) $-7$

2- محددة $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ تساوى

a) $-73$ b) لا يمكن c) $-17$ d) $45$

### *3.3.4* حساب المحددات $3 \times 3$

المحدد $3 \times 3$ للمصفوفة المربعة $A$ هي عبارة عن مجموع حاصل ضرب عناصر الأقطار الموازية للقطر الرئيسي (من اعلى الى اسفل) ناقص مجموع حواصل ضرب عناصر الأقطار غير الرئيسية (من اسفل الى اعلى) ونتحصل على هذه الأقطار بإضافة عمودين مماثلين للعمودين الأول والثاني على اليمين.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$A = \left|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$$

$$= (a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3) - (a_3 b_2 c_1 + b_3 c_2 a_1 + c_3 a_2 b_1)$$

**مثال 12:** أوجد قيمة $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

الحل:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 4 & -1 & 3 & 4 & -1 \\ -3 & 2 & 6 & -3 & 2 \\ -2 & 5 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right.$$

$$= \left((4 \times 2 \times 1) + \left(-1 \times 6 \times (-2)\right) + (3 \times (-3) \times 5)\right)$$
$$- \left((3 \times 2 \times (-2)) + (4 \times 6 \times 5) + (-1 \times (-3) \times 1)\right)$$
$$= (\,8 + 12 + (-45)\,) - (\,(-12) + 120 + 3\,) = \ -25 - \ 111 =$$

$$= \ -136$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -136$$

**تمرين4-9:** اختر الإجابة الصحيحة :

-1 $\begin{vmatrix} -8 & -4 & 4 \\ 0 & -5 & -8 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ تساوى

$a)\ -60$ $\qquad b)\ \ -525$ $\qquad c)\ -8$ $\qquad d)\ \ 60$

-2 $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 7 & 0 & -8 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$ تساوى

$a)\ -174$ $\qquad b)\ \ 174$ $\qquad c)\ 60$ $\qquad d)\ \ 45$

*4.4* مقلوب (معكوس) مصفوفة:

إذا كانت $A$ مصفوفة مربعة وكانت محددتها لا تساوي الصفر فإنه يوجد مقلوب للمصفوفة $A$ ويرمز لها بالرمز $A^{-1}$ أي أن:

$$AA^{-1} = \ A^{-1}A = I$$

سنتطرق في هذه الوحدة على معكوس مصفوفة $2 \times 2$ فقط.

**نظرية:** اذا كانت $a, b, c, d$ اعداد حقيقية بحيث أن :

$$|A| \ = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$

فإن مقلوب المصفوفة تساوي :

$$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{|A|}$$

**مثال 13:** أوجد مقلوب المصفوفات التالية:

$$a)\ \ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \qquad\qquad b)\ \ B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$a)\ \ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

أولا نوجد $|A|$ :

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = (2 \times 3) - (1 \times 6) = 6 - 6 = 0$$

بما ان $|A| = 0$ اذن لا يمكن ايجاد $A^{-1}$

$$b)\ \ B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

أولا نوجد $|B|$ :

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 6 = 2$$

بما أن $|B| \neq 0$ أذن يمكن إيجاد $B^{-1}$

$$B^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{|B|} = \frac{\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}}{2} = \begin{bmatrix} \frac{4}{2} & \frac{-2}{2} \\ \frac{-3}{2} & \frac{2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1.5 & 1 \end{bmatrix}$$

**تمرين4-10:** اختر الإجابة الصحيحة :

-1 إذا كان $A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ , فإن $A^{-1}$

$a)$ لا يمكن $\quad b)\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \quad c)\begin{bmatrix} 6 & -9 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad d)\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$

-2 اذا كان $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ فإن $B^{-1}$

$a)$ لا يمكن $\quad b)\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \quad c)\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad d)\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & -2 \end{bmatrix}$

تمارين (4-11)

1) رتبة المصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ تساوي

a) $2\times 1$ b) $3\times 1$ c) $2\times 3$ d) $3\times 2$

2) رتبة المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ تساوي

a) $3\times 2$ b) $2\times 3$ c) $2\times 1$ d) $2\times 2$

3) قيمة $a$ التي تجعل المصفوفتان $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ a & 0 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ متساوية :

a) $a=2$ b) $a=-2$ c) $a=1$ d) $a=-1$

4) اذا كانت $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ فان $A+B$ تساوي

a) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

5) اذا كانت $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ فان $A-B$ تساوي

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

6) اذا كانت $B=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ فان $A \bullet B$ تساوي

a) $\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

7) اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ فان $2A$ تساوي

a) $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

8) اذا كانت $A = \begin{bmatrix} -6 & -4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ فان $\frac{A}{2}$ تساوي

a) $\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -12 & -8 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

9) المصفوفة التي تمثل مصفوفة الوحدة هي .

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

12) نرمز لمحددة مصفوفة $A$ بالرمز

a) $\boldsymbol{A^2}$ b) A c) $|A|$ d) $\boldsymbol{A^{-1}}$

13) قيمة محدد المصفوفة $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ تساوي

a) 10 b) 7 c) 3 d) 13

14) نوع المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \end{bmatrix}$ هي

a) صف b) عمود c) صفرية d) مربعة

15) نوع المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ هي

a) صف b) عمود c) صفرية d) مربعة

16) إذا كانت $B = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ , $A = \begin{bmatrix} 5 & 13 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ فان $A - B$

a) $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 5 & 13 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -2 & 10 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 3 & 23 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

17) $\begin{vmatrix} -8 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & -8 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ قيمة المحددة تساوى

a) $-98$ b) 98 c) 0 d) 102

18) $\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$ قيمة المحددة تساوى

a) 18 b) 10 c) 28 d) 0

19) إذا كان $A = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ , فإن $A^{-1}$ تساوي

a) $\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{-1}{12} \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{-1}{6} & \frac{-1}{12} \end{bmatrix}$

20) إذا كانت $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ , فإن $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ $\underline{A} \cdot \underline{B}$ تساوي

a) $\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 25 & -5 \end{bmatrix}$

21) قيمة العنصر $b_{22}$ فى المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ تساوي

a) 2 b) 4 c) 3 d) 7

22) قيمة العنصر $a_{12}$ فى المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ تساوي

a) 3 b) -2 c) 1 d) 0

<table>
<tr><td colspan="6">نموذج تقييم المتدرب لمستوى أدائه<br>يعبأ من قبل المتدرب نفسه وذلك بعد الانتهاء من تمارين الوحدة</td></tr>
<tr><td colspan="6">بعد الانتهاء من التدرب على وحدة المصفوفات والمحددات، قيم نفسك وقدراتك بواسطة إكمال هذا التقييم الذاتي بعد كل عنصر من العناصر المذكورة، وذلك بوضع علامة (✓) أمام مستوى الأداء الذي أتقنته، وفي حالة عدم قابلية المهمة للتطبيق ضع العلامة في الخانة الخاصة بذلك.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">م</td><td rowspan="2">العناصر</td><td colspan="4">مستوى الأداء (هل أتقنت الأداء)</td></tr>
<tr><td>غير قابل للتطبيق</td><td>لا</td><td>جزئيا</td><td>كليا</td></tr>
<tr><td>1</td><td>تعريف المصفوفات</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>تمييز رتبة المصفوفات</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>تمييز أنواع المصفوفات</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>حساب العمليات الحسابية على المصفوفات</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>حساب المحددات</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>حساب مقلوب المصفوفة</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="6">يجب أن تصل النتيجة لجميع المفردات (البنود) المذكورة إلى درجة الإتقان الكلي أو أنها غير قابلة للتطبيق، وفي حالة وجود مفردة في القائمة "لا" أو "جزئيا" فيجب إعادة التدرب على هذا النشاط مرة أخرى بمساعدة المدرب.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="6">نموذج تقييم المدرب لمستوى أداء المتدرب<br>يعبأ من قبل المدرب وذلك بعد الانتهاء من تمارين الوحدة</td></tr>
<tr><td colspan="2">اسم المتدرب :<br>.............................................................</td><td colspan="4">التاريخ:<br>......................................</td></tr>
<tr><td colspan="2">رقم المتدرب :<br>.............................................................</td><td colspan="4">المحاولة : 1 2 3 4<br>العلامة : ...... ...... ...... ......</td></tr>
<tr><td colspan="6">كل بند أو مفردة يقيم بـ 10 نقاط<br>الحد الأدنى: ما يعادل 80% من مجموع النقاط. الحد الأعلى: ما يعادل 100% من مجموع النقاط.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">م</td><td rowspan="2">بنود التقييم</td><td colspan="4">النقاط ( حسب رقم المحاولات )</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>1</td><td>تعريف المصفوفات</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>تمييز رتبة المصفوفات</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>تمييز أنواع المصفوفات</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>حساب العمليات الحسابية على المصفوفات</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>حساب المحددات</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>حساب مقلوب المصفوفة</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">المجموع</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="6">ملحوظات:<br>..........................................................................................<br>...................<br>توقيع المدرب: .............................</td></tr>
</table>

# الوحدة الخامسة

## المعادلات

# الوحدة الخامسة
# المعادلات

الهدف العام للوحدة:

تهدف هذه الوحدة إلى معرفة المعادلات والقدرة على حلها.

الأهداف التفصيلية:

**من المتوقع في نهاية هذه الوحدة التدريبية أن يكون المتدرب قادراً وبكفاءة على أن:**

1. يميز المعادلات .
2. يحل المعادلات من الدرجة الأولى.
3. يحل المعادلات من الدرجة الثانية.
4. يحل المعادلات الخطية ذات مجهول واحد.
5. يحل المعادلات الخطية ذات مجهولين.
6. يحل المعادلات الخطية ذات ثلاثة مجاهيل.

الوقت المتوقع للتدريب على هذه الوحدة: 12 ساعة تدريبية.

# المعادلات

1-5 تعريف:
المعادلة هي التساوي بين عبارتين (كثيرتي حدود). وتكون هذه المعادلة صحيحة لقيم معينة للمجهول وخاطئة لقيم أخرى.

مثلاً المعادلة $2x+1=9$ تكون صحيحة عندما $x=4$ وخاطئة لأية قيمة أخرى ل $x$ إذن نقول إن $x=4$ هو حل للمعادلة لأنه عند تعويض $x$ بالقيمة 4 تصبح المعادلة $2(4)+1=9$ وهذا صحيح.
إذن عملية حل معادلة هي إيجاد كل قيم المتغير التي تستوفي المعادلة، وعادة ما نسمي هذه القيم حلول أو جذور المعادلة.

2.5 المعادلات الخطية.
**تعريف 1.2.5:** المعادلة الخطية هي التي تكتب على الصورة $ax+b=0$ حيث $a$ و $b$ اعداد حقيقيه و $a\neq 0$ ويكون الحل العام $x=\frac{-b}{a}$

**مثال 1:** حل المعادلات التأليه:

$$a)\ 2x=10 \qquad b)\ 3x+2=8 \qquad c)\ 5x+1=\frac{x}{2}+10$$

الحل :

$a)\ 2x=10$

$$\frac{2}{2}x=\frac{10}{2} \quad \rightarrow \quad x=5$$

$b)\ 3x+2=8$

$$3x+2=8 \quad \rightarrow \quad 3x=8-2 \quad \rightarrow \quad 3x=6$$

$$x=\frac{6}{2} \quad \rightarrow \quad x=3$$

$c)\ 5x+1=\frac{x}{2}+10$

$$2\times(5x+1)=2\times\left(\frac{x}{2}+10\right) \quad \rightarrow \quad 10x+2=x+20$$

$$10x-x=20-2 \quad \rightarrow \quad 9x=18 \quad \rightarrow \quad x=\frac{18}{9}$$

$$x=2$$

**تمرين5-1:** اختر الإجابة الصحيحه لحل المعادلات التاليه :

1) $5x - 2 = 18$

$a)\ x = 4$ $\quad b)\ x = -4$ $\quad c)\ x = 5$ $\quad d)\ x = -5$

2) $6x + 4 = 2x + 12$

$a)\ x = 2$ $\quad b)\ x = -2$ $\quad c)\ x = 4$ $\quad d)\ x = -4$

3) $\dfrac{2x+3}{3} = \dfrac{x-1}{2}$

$a)\ x = 9$ $\quad b)\ x = -9$ $\quad c)\ x = 3$ $\quad d)\ x = -3$

3.5 معادلات من الدرجة الثانية:

معادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد يمكن كتابتها على الصورة القياسية التالية:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad , \ a \neq 0$$

**1.3.5 ولحلها نستخدم القانون العام:**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مثلا:

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$$

ملاحظة1 : يسمى المقدار $b^2 - 4ac$ مميز المعادلة ويرمز له بالرمز $\Delta$ ( دلتا ) وعليه فيمكن كتابة القانون العام :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

وأما دور المميز فهو تحديد عدد جذور (حلول) المعادلة في $R$ كما يوضحه الجدول الآتي:

| المميز | عدد الحلول |
|---|---|
| $\Delta > 0$ | حلان حقيقيان |
| $\Delta = 0$ | حل واحد حقيقي |
| $\Delta < 0$ | لا توجد حلول حقيقية |

**مثال 2:** اوجد حل المعادلات الأتية في $R$

$a)\ x^2+5x=-6 \qquad b)\ 2x^2-4x+2=0$

$c)\ 3x^2+2x=-1$

أولا : نكتب المعادلة على الصورة القياسية $ax^2+bx+c=0$:

$$a)\ x^2+5x+6=0$$

ثانيا : نوجد قيمة المعاملات $a\ ,b\ ,c$ :

$$a=1 \qquad ,b=5 \qquad ,c=6$$

ثالثا: نوجد قيمة المميز : $\Delta=b^2-4ac$

$$\Delta=5^2-4(1)(6) \quad \Rightarrow \quad \Delta=25-24$$

$$\Delta=1 \qquad ,\Delta=1>0$$

يوجد حلان حقيقيان

رابعا: نعوض باستخدام القانون العام :

$$x=\frac{-b\ \pm\ \sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5\ \pm\ \sqrt{1}}{2(1)}=\frac{-5\ \pm\ 1}{2}$$

$$x=\begin{cases} x_1=\dfrac{-5+\ 1}{2}=\dfrac{-4}{2}=-2 \\ \\ x_2=\dfrac{-5-\ 1}{2}=\dfrac{-6}{2}=-3 \end{cases}$$

وبالتالي يكون الحلان هما : $-3\ ,\ -2$

$$b)\ 2x^2-4x+2=0$$

المعادلة مكتوبه على الصورة القياسية وبالتالي نستطيع الحل باستخدام الخطوات السابقة في الفقرة $a$ او التعويض مباشرة في القانون العام :

$$ax^2+bx+c=0$$
$$2x^2-4x+2=0$$

$$x=\frac{-b\ \pm\ \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(2)(2)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{4} = \frac{4 \pm 0}{4}$$

$$x = \frac{4}{4} \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

يوجد حل واحد فقط لان $\Delta = 0$ وبالتالي يكون الحل هو $1$

$$c)\ \ 3x^2 + 2x = -1$$

أولا : نكتب المعادلة على الصورة القياسية $ax^2 + bx + c = 0$ :

$$3x^2 + 2x + 1 = 0$$

ثانيا : نوجد قيمة المعاملات $a, b, c$ :

$$a = 3 \qquad , b = 2 \qquad , c = 1$$

ثالثا: نوجد قيمة المميز : $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = 2^2 - 4(3)(1) \quad \Rightarrow \quad \Delta = 4 - 12$$

$$\Delta = -8 \qquad\qquad , \Delta = -8 < 0$$

وبالتالي لا يوجد حل للمعادلة لان المميز اقل من الصفر

**تمرين5-2:** اختر الإجابة الصحيحه لحل المعادلات التالية :

1) $x^2 + 7x = -10$

$a)\ x = -2, x = -5 \quad b)\ x = 2, \ x = 5 \quad c)$ لايوجد حل $\quad d)\ x = 4$

2) $x^2 + 8x + 16 = 0$

$a)\ x = -3, x = 4 \quad b)\ x = 5 \quad c)$ لايوجد حل $\quad d)\ x = -4$

3) $5x^2 + x + 2 = 0$

$a)\quad x = 4 \qquad b)\quad x = 5 \qquad c)$ لايوجد حل $\qquad d)\ x = -4$

4.5 حل مجموعة معادلات خطيه

المعادلة الخطية هي معادلة من الدرجة الأولى.

مثلاً:

معادلة خطيه من الدرجة الأولى في متغير واحد $5x + 10 = 0$

معادلة خطيه من الدرجة الثانية في متغيرين $2x + 3y = 5$

معادلة خطيه من الدرجة الأولى في ثلاثة متغيرات $x + 2y - 5z = 1$

**تعريف :**

جملة المعادلات الخطية هي عباره عن مجموعة من المعادلات الخطية.

جملة معادلتين خطيتين ذات مجهولين :

لدينا طريقتين لحل جملة معادلتين خطيتين ذات مجهولين:

- 1.4.5 المعادلات المصفوفية :

لتمثيل جملة معادلتين خطيتين ذات مجهولين يمكن استخدام المصفوفات. فمثلاً يمكن كتابة معادلة مصفوفيه لحل جملة معادلتين خطيتين ذات مجهولين:

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} a_1x + b_1y \\ a_2x + b_2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

ويمكن التعبير عما سبق بالمعادلة المصفوفية الاتية:

$$A \quad \cdot \quad X \quad = \quad C$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}}_{\text{مصفوفة المعاملات}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\text{مصفوفة المجاهيل}} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}_{\text{مصفوفة الثوابت}}$$

ثم نحل المعادلة المصفوفية بالطريقة التالية:

$$AX = B$$
$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$
$$IX = A^{-1}B$$
$$X = A^{-1}B$$

لاحظ ان حل المعادلة المصفوفية من الشكل $AX = B$ هو حاصل ضرب النظير الضربي لمصفوفة المعاملات في مصفوفة الثوابت.

(المعكوس الضربي ) النظير الضربي للمصفوفة من النوع $2 \times 2$ :

النظير الضربي للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هو $A^{-1} = \dfrac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{|A|}$

وذلك إذا كانت $|A| \neq 0$

**مثال 3:** أوجد حل المعادلتين باستخدام طريقة المعادلات المصفوفية:

$$2x + 3y = 1$$
$$3x - 4y = 2$$

الحل :

$$2x + 3y = 1$$
$$3x - 4y = 2$$
$$A\,x = b$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = (-8 - 9) = -17$$

حيث أن $\Delta \neq 0$ ، فإن المصفوفة $A$ لها معكوس ضربي

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-17} \cdot \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$x = A^{-1}\, b$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-17} \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-17} \begin{bmatrix} -4-6 \\ -3+4 \end{bmatrix} = \frac{1}{-17} \begin{bmatrix} -10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{17} \\ \frac{-1}{17} \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{10}{17} \quad , \quad y = \frac{-1}{17}$$

**مثال 4:** أوجد حل جملة المعادلتين باستخدام طريقة المعادلات المصفوفية:

$$x + y = 5$$
$$x - y = 1$$

الحل :

$$x + y = 5$$
$$x - y = 1$$
$$A\,x = b$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1-1) = -2$$

حيث أن $\Delta \neq 0$ ، فإن المصفوفة $A$ لها معكوس ضربي

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = A^{-1}\, b$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -5+1 \\ -5-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$x = 2 \quad , \quad y = 3$

**مثال 5:** أوجد حل جملة المعادلتين باستخدام طريقة المعادلات المصفوفية:

$$3x + y = 5$$
$$6x + 2y = 1$$

الحل :

$$3x + y = 5$$
$$6x + 2y = 1$$
$$A\,x = b$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = (6-6) = 0$$

حيث أن $\Delta = 0$ ، فإن المصفوفة $A$ ليس لها معكوس ضربى وبالتالي لا يوجد حل للمعادلة.

**تمرين 5-3:** إختر الإجابة الصحيحة :

1) إذا كانت المعادلتين $x + y = 5$ , $2x - 7y = 3$ ، فإن مجموعة حل المعادلتين تساوى

$a)\ x = \frac{38}{9}\ , y = \frac{7}{9}$ $\qquad b)\ x = 5\ , y = 3$

$c)\ x = 2\ , y = 7$ $\qquad d)\ x = 1\ , y = 1$

2) إذا كانت المعادلتين $x+y=10$ , $x-y=4$ ، فإن مجموعة حل المعادلتين تساوى

$a)\ x=1\,,y=1$ $b)\ x=7\,,y=3$
$c)\ x=1\,,y=-1$ $d)\ x=4\,,y=10$

3) إذا كانت المعادلتين $3x+y=1$ , $x+2y=5$ ، فإن مجموعة حل المعادلتين تساوى

$a)\ x=3\,,y=5$ $b)\ x=2\,,y=3$
$c)\ x=1\,,y=1$ $d)$ لا يوجد حل

- 2.4.5 طريقة كرايمر:

ليكن لدينا جملة معادلتين خطيتين ذات مجهولين $x$ و $y$ على الشكل التالي :

$$a_1x+b_1y=c_1$$
$$a_2x+b_2y=c_2$$

بحيث ان المعاملات $a_1,a_2,b_1,b_1$ والثوابت $c_1,c_2$ اعداد حقيقية

فان حل جملة المعادلتين:

$$x=\frac{D_x}{D} \qquad , \qquad y=\frac{D_y}{D}$$

حيث ان:

محدد الجملة $D$ هو المحدد $2\times2$ بحيث كل عمود فيه متكون من معاملات مجهول واحد وكل صف متكون من معاملات المجاهيل في معادلة واحدة أي ان:

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1\,b_2-a_2\,b_1$$

محدد مجهول ما هو المحدد $2\times2$ بحيث نستبدل عمود معاملات المجهول بعمود الثوابت في محدد الجملة، أي ان :

$$D_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=c_1b_2-c_2b_1$$

$$D_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=a_1c_2-a_2c_1$$

ملاحظة 2 :

1- اذا كان $D\neq0$ فان للجملة حل وحيد هو :

$$x=\frac{D_x}{D} \qquad , \qquad y=\frac{D_y}{D}$$

2- اذا كان $D=0$ فان لدينا حالتين :

- **الحالة الأولى:** اذا كان واحدا على الأقل من محددات المجاهيل لا يساوي الصفر فان الجملة مستحيلة الحل.
- **الحالة الثانية :** اذا كانت كل محددات المجاهيل تساوي الصفر فان للجملة عدد لا نهائي من الحلول

**مثال 6:** حل جملة المعادلات التالية بطريقة كرايمر

$$a)\quad \begin{cases} 4x+5y=3 \\ x+y=1 \end{cases} \qquad b)\quad \begin{cases} 2x+6y=4 \\ x+3y=2 \end{cases} \qquad c)\quad \begin{cases} -2x+y=5 \\ x-0.5y=2 \end{cases}$$

الحل:

$$a)\quad \begin{cases} 4x+5y=3 \\ x+y=1 \end{cases}$$

أولا: نحسب محدد الجملة $D$ :

$$D=\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=(4)(1)-(1)(5)=4-5=-1$$

وبالتالي يوجد حل وحيد لان $D=-1\neq 0$

ثانيا: نحسب محددات المجاهيل $D_x$ و $D_y$ :

$$D_x=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=(3)(1)-(1)(5)=3-5=-2$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=(4)(1)-(1)(3)=4-3=1$$

ثالثا: نوجد قيم $x$ و $y$ :

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-2}{-1}=2 \qquad , \qquad y=\frac{D_y}{D}=\frac{1}{-1}=-1$$

**ملاحظة 3 :** للتأكد من الحل نعوض عن قيمة كلا من قيم $x$ و $y$ في جملة المعادلات.

$$b)\quad \begin{cases} 2x+6y=4 \\ x+3y=2 \end{cases}$$

أولا: نحسب محدد الجملة $D$ :

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3) - (6)(1) = 6 - 6 = 0$$

ثانيا: نحسب محددات المجاهيل $D_x$ و $D_y$ :

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (4)(3) - (2)(6) = 12 - 12 = 0$$

ثالثا نحسب محدد المجاهيل ل y

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (2)(2) - (1)(4) = 4 - 4 = 0$$

بما ان محدد الجملة $(D = 0)$ ومحددات المجاهيل $D_x = D_y = 0$
اذن للجملة عدد لانهائي من الحلول

$$c) \quad \begin{cases} -2x + y = 5 \\ x - 0.5y = 2 \end{cases}$$

أولا: نحسب محدد الجملة $D$ :

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{vmatrix} = (-2)(-0.5) - (1)(1) = 1 - 1 = 0$$

ثانيا: نحسب محددات المجاهيل $D_x$ و $D_y$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -0.5 \end{vmatrix} = (5)(-0.5) - (2)(1) = -2.5 - 2 = -4.5 \neq 0$$

بما أن محدد الجملة $(D = 0)$ ومحدد $D_x \neq 0$
اذن الجملة مستحيلة الحل

**تمرين5-4** : اختر الإجابة الصحيحه لحل جملة المعادلات التاليه :

$$1) \quad \begin{cases} 3x + 4y = -14 \\ -2x - 3y = 11 \end{cases}$$

$a)\ x = 2, y = -5$ $\quad b)\ x = -5, y = -2$ $\quad c)$ مستحيلة الحل $\quad d)$ عدد لانهائي

$$2) \quad \begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x + 6y = 4 \end{cases}$$

$a)\ x = 2\ , y = 0$ $b)\ x = 1\ , y = 3$ $c)$ مستحيلة الحل $d)$ عدد لانهائي

3) $\begin{cases} 7x + 3y = 27 \\ -2x + 5y = 4 \end{cases}$

$a)\ x = 3\ , y = 2$ $b)\ x = 2\ , y = 3$ $c)$ مستحيلة الحل $d)$ عدد لانهائي

5.5 جملة ثلاث معادلات خطية ذات ثلاثة مجاهيل:

**تعريف 5-5-1:** ليكن لدينا جملة ثلاث معادلات خطية ذات المجاهيل $x$ و $y$ و $z$ على الشكل التالي :

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

فان حل هذه الجملة :

$$x = \frac{D_x}{D} \qquad , \qquad y = \frac{D_y}{D} \qquad , \qquad z = \frac{D_z}{D}$$

بحيث ان المعاملات $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, , c_3$ والثوابت $d_1, d_2, d_3$ اعداد حقيقية

حيث :

محدد الجملة $D$ هو المحدد $3 \times 3$ بحيث كل عمود فيه متكون من معاملات مجهول واحد وكل صف متكون من معاملات المجاهيل في معادلة واحدة أي ان :

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$$

محدد مجهول ما هو المحدد $3 \times 3$ بحيث نستبدل عمود معاملات المجهول بعمود الثوابت في محدد الجملة ،أي ان :

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \\ d_3 & b_3 \end{matrix}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \\ a_3 & d_3 \end{matrix}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$$

ملاحظة 4 :

1- اذا كان $D \neq 0$ فان للجملة حل وحيد هو :

$$x = \frac{D_x}{D} \quad , \quad y = \frac{D_y}{D} \quad , \quad z = \frac{D_z}{D}$$

2- اذا كان $D = 0$ فان لدينا حالتين :

- الحالة الأولى: اذا كان واحدا على الأقل من محددات المجاهيل لا يساوي الصفر فان الجملة مستحيلة الحل
- الحالة الثانية : اذا كانت كل محددات المجاهيل تساوي الصفر فان للجملة عدد لا نهائي من الحلول

**مثال7 :** حل جملة المعادلات التالية بطريقة كرايمر

$$a) \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 3y + z = 11 \\ 3x + 2y + 2z = 13 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 2x + y - z = 5 \\ 3x - y + 2z = 12 \end{cases}$$

الحل:

$$a) \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 3y + z = 11 \\ 3x + 2y + 2z = 13 \end{cases}$$

أولا: نحسب محدد الجملة $D$ :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{matrix} = 6 + 3 + 4 - 9 - 2 - 4 = -2 \neq 0$$

ثانيا: نحسب محددات المجاهيل $D_x$ و $D_y$ و $D_z$ :

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 11 & 3 & 1 \\ 13 & 2 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 6 & 1 \\ 11 & 3 \\ 13 & 2 \end{matrix} = 36 + 13 + 22 - 39 - 12 - 22 = -2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 3 & 13 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 6 \\ 2 & 11 \\ 3 & 13 \end{matrix} = 22 + 18 + 26 - 33 - 13 - 24 = -4$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 11 \\ 3 & 2 & 13 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{matrix} = 39 + 33 + 24 - 54 - 22 - 26 = -6$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-2}{-2} = 1 \quad , \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$b) \quad \begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 2x + y - z = 5 \\ 3x - y + 2z = 12 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{matrix} = 2 + 6 - 2 - 3 - 1 - (-8) = 10 \neq 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 12 & -1 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \\ 12 & -1 \end{matrix} = 6 + 24 - 5 - 12 - 3 - (-20) = 30$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 12 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & 12 \end{matrix} = 10 - 9 + 24 - 15 - (-12) - 12 = 10$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 12 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{matrix} = 12 - 30 - 6 - 9 - (-5) - (-48) = 20$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{30}{10} = 3 \quad , \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{10}{10} = 1$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{20}{10} = 2$$

**تمرين5-5:** اختر الإجابة الصحيحه لحل جملة المعادلات التاليه :

1) $\begin{cases} x - y + 2z = -4 \\ 3x + y - 4z = -6 \\ 2x + 3y - 4z = 4 \end{cases}$

$a)\ x = -2\ , y = 4, z = 1 \qquad b)\ x = -2\ , y = 4, z = -1$

$c)$ مستحيلة الحل $\quad d)$ عدد لانهائي

2) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 17 \\ 3x + 2y + z = 11 \\ x - 5y + z = -5 \end{cases}$

$a)\ x = 1\ , y = 2, z = 4 \qquad b)\ x = -1\ , y = 3, z = -4$

$c)$ مستحيلة الحل $\quad d)$ عدد لانهائي

# تمارين(6-5)

1) حل المعادلة التالية $2x - 10 = 0$ هو

a) $x = 2$ b) $x = 5$ c) $x = 6$ d) $x = 4$

2) حل المعادلة التالية $3x = x + 2$ هو

a) $x = 1$ b) $x = 2$ c) $x = 3$ d) $x = 4$

3) حل المعادلة التالية $\boldsymbol{x} - 4 = 9$ هو

a) $x = 13$ b) $x = 9$ c) $x = 4$ d) $x = 5$

4) حل المعادلة التالية $x^2 + 8x + 15 = 0$ هو

a) $x = -3$ او $x = -5$ b) $x = 3$ او $x = -5$ c) $x = -3$ او $x = 5$ d) $x = 3$ او $x = 5$

5) حل جملة المعادلات التالية $3x + 2y = 8$ هو
$2x + y = 5$

a) $x = 2\ , y = 1$ b) $x = -2\ , y = 1$ c) $x = 2\ , y = -1$ d) $x = 1\ , y = 2$

6) حل المعادلة التالية $2x + 30 = 0$ هو

a) $x = -15$ b) $x = 15$ c) $x = 30$ d) $x = 2$

7) حل المعادلة التالية $4x = 2x + 2$ هو

a) $x = 1$ b) $x = 2$ c) $x = -2$ d) $x = -1$

8) حل المعادلة التالية $x^2 + 13x + 36 = 0$ هو

a) $x = -9$ او $x = -4$ b) $x = 9$ او $x = 4$ c) $x = 5$ او $x = 4$ d) $x = -5$ او $x = -4$

9) حل المعادلة التالية $x^2 + 5x - 14 = 0$ هو

a) $x = -7$ او $x = 2$ b) $x = 7$ او $x = -2$ c) $x = 2$ او $x = 7$ d) $x = 5$ او $x = 2$

10) حل المعادلة التالية $x^2 - 5x - 14 = 0$ هو

a) $x = -7$ او $x = 2$ b) $x = -7$ او $x = -2$ c) $x = 7$ او $x = 2$ d) $x = 7$ او $x = -2$

11) حل المعادلة التالية $5x - 10 = 5$ هو

a) $x = 2$ b) $x = 3$ c) $x = 4$ d) $x = 5$

12) حل المعادلة التالية $4x = x + 12$ هو

a) $x = 1$ b) $x = 2$ c) $x = 3$ d) $x = 4$

13) حل المعادلة التالية $\boldsymbol{x^2} - 4 = 0$ هو

a) $x = \pm 1$ b) $x = \pm 2$ c) $x = \pm 3$ d) $x = \pm 4$

14) حل المعادلة التالية $x^2 + 8x + 15 = 0$ هو

a) $x = -3$ او $x = -5$ b) $x = 3$ او $x = 5$ c) $x = -3$ او $x = 5$ d) $x = 3$ او $x = -5$

15) حل جملة المعادلات التالية

$$3x + 2y = 8$$
$$2x + y = 5$$

هو

a) $x = 2, y = 1$ b) $x = 1, y = 2$ c) $x = -2, y = 1$ d) $x = 2, y = -1$

20) حل جملة المعادلات التالية

$$2x - y = -9$$
$$x + 2y = 8$$

هو

a) $x = -2, y = 5$ b) $x = 2, y = 5$ c) $x = 2, y = -5$ d) $x = -2, y = -5$

16) حل جملة المعادلات التالية

$$6x + 2y + 4z = 14$$
$$3x + 2y - 8z = -1$$
$$-3x - 6y + 5z = -10$$

a) $x = 1, y = 2, z = 1$ b) $x = 1, y = 1, z = 1$ c) $x = 0, y = 2, z = 1$ d) $x = 1, y = 3, z = 3$

<table dir="rtl">
<tr><td colspan="6">نموذج تقييم المتدرب لمستوى أدائه<br>يعبأ من قبل المتدرب نفسه وذلك بعد الانتهاء من تمارين الوحدة</td></tr>
<tr><td colspan="6">بعد الانتهاء من التدرب على وحدة المعادلات، قيم نفسك وقدراتك بواســطة إكمال هذا التقييم الذاتي بعد كل عنصر من العناصر المذكورة، وذلك بوضع عـــلامة (✓) أمام مستوى الأداء الذي أتقنته، وفي حالة عدم قابلية المهمة للتطبيق ضع العلامة في الخانة الخاصة بذلك.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">م</td><td rowspan="2">العناصـــر</td><td colspan="4">مستوى الأداء (هل أتقنت الأداء)</td></tr>
<tr><td>غير قابل للتطبيق</td><td>لا</td><td>جزئيا</td><td>كليا</td></tr>
<tr><td>1</td><td>تمييز المعادلات .</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>حل المعادلات من الدرجة الأولى</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>حل المعادلات من الدرجة الثانية</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>حل المعادلات الخطية ذات مجهول واحد</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>حل المعادلات الخطية ذات مجهولين</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>حل المعادلات الخطية ذات ثلاثة مجاهيل</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

يجب أن تصل النتيجة لجميع المفردات (البنود) المذكورة إلى درجة الإتقان الكلي أو أنها غير قابلة للتطبيق، وفي حالة وجود مفردة في القائمة "لا" أو "جزئيا" فيجب إعادة التدرب على هذا النشاط مرة أخرى بمساعدة المدرب.

| نموذج تقييم المدرب لمستوى أداء المتدرب<br>يعبأ من قبل المدرب وذلك بعد الانتهاء من تمارين الوحدة | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| اسم المتدرب : ........................................................................ | | التاريخ: ...................................... | | | |
| رقم المتدرب : ........................................................................ | | المحاولة : 1 2 3 4<br>العلامة : ...... ...... ...... ...... | | | |
| كل بند أو مفردة يقيم بـ 10 نقاط<br>الحد الأدنى: ما يعادل 80% من مجموع النقاط. الحد الأعلى: ما يعادل 100% من مجموع النقاط. | | | | | |
| م | بنود التقييم | النقاط ( حسب رقم المحاولات ) | | | |
| | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | تمييز المعادلات . | | | | |
| 2 | حل المعادلات من الدرجة الأولى | | | | |
| 3 | حل المعادلات من الدرجة الثانية | | | | |
| 4 | حل المعادلات الخطية ذات مجهول واحد | | | | |
| 5 | حل المعادلات الخطية ذات مجهولين | | | | |
| 6 | حل المعادلات الخطية ذات ثلاثة مجاهيل | | | | |
| المجموع | | | | | |
| ملحوظات: ......................................................................................................<br>..................<br>توقيع المدرب: ............................ | | | | | |

# الوحدة السادسة

# الهندسة المستوية والفراغية

# الوحدة السادسة
# الهندسة المستوية والفراغية

الهدف العام للوحدة:
تهدف هذه الوحدة إلى معرفة مبادئ الهندسة المستوية والفراغية.

الأهداف التفصيلية:
**من المتوقع في نهاية هذه الوحدة التدريبية أن يكون المتدرب قادراً وبكفاءة على أن :**

1. يُعرف الاشكال الهندسية المستوية (الأشكال الرباعية-المثلث-الدائرة)
2. يحسب المساحة والمحيط للأشكال الهندسية المستوية.
3. يميز اشكال الهندسة الفراغية (المكعب- الأسطوانة -البيضاوي-المخروط)
4. يحسب المساحة والحجم للأشكال الهندسية الفراغية

الوقت المتوقع للتدريب على هذه الوحدة: 8 ساعات تدريبية.

# الهندسة المستوية

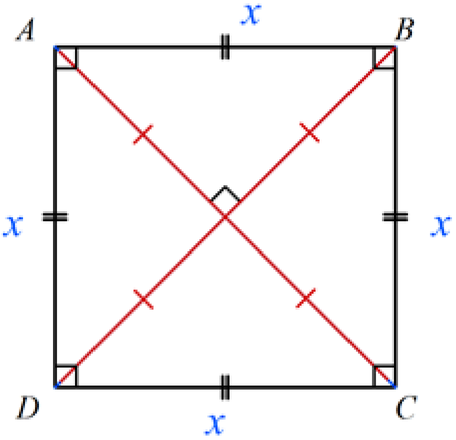
الهندسة المستوية فرع من الرياضيات يهتم بدراسة الأشكال الهندسية التي تقع كل نقاطها في مستوٍ واحد، وتنقسم الى قسمين هما المضلعات و الدائرة.

1.6 الاشكال الرباعية :

الشكل الرباعي هو كل شكل هندسي مغلق له أربعة اضلاع وأربعة زوايا ومجموع زواياه تساوي $360°$ ومن الأمثلة على الشكل الرباعي ( المربع – المستطيل – المعين – شبه المنحرف – متوازي الأضلاع )

## 1.1.6 المربع

المربع هو شكل رباعي له أربعة أضلاع متساوية وجميع زواياه قائمة كما في الشكل 6-1.




شكل $1-6$

مساحة و محيط

إذا كان طول ضلع المربع $x$ فإن:

مساحة المربع : $A = x^2$

محيط المربع : $P = 4x$

**مثال 1:** احسب مساحة و محيط المربع الذي طول ضلعه 3 cm ؟

الحل :

المساحة $A = x^2$

$A = (3)^2 = 9\ cm^2$

المحيط $P = 4x$

$P = 4 \times 3 = 12\ cm$

**مثال 2:** سجادة مربعة الشكل طولها 6m احسب مساحتها ومحيطها ؟
الحل :

المساحة:
$$A = x^2$$
$$A = (6)^2 = 36\ m^2$$

المحيط :
$$P = 4\,x$$
$$P = 4 \times 6 = 24\ m$$

**مثال 3 :** حديقة مربعة الشكل محيطها $24\ m$ ، احسب طول ضلعها ثم احسب مساحة الحديقة ؟
الحل :
$$P = 4\,x = 24$$
$$4\,x = 24$$
$$x = \frac{24}{4} = 6\ m$$
إذا طول ضلع الحديقة يساوى $6\ m$
$$A = x^2$$
$$A = (\,6\,)^2 = 36\ m^2$$
إذا مساحة الحديقة تساوى $36\ m^2$

**مثال 4 :** مربع مساحته $9\ cm^2$ ، أوجد طول ضلعه ثم أوجد محيطه ؟
الحل :
$$A = x^2 = 9$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \sqrt{9} = 3\ cm$$
إذا طول ضلع المربع يساوى $3\ cm$
$$P = 4\,x$$
$$P = 4 \times 3 = 12\ cm$$
إذا محيط المربع يساوى $12\ cm$

**تمرين 6-1:** إختر الاجابة الصحيحة:

1- مربع طول ضلعه $7\ cm$ فإن محيطه يساوى

a) $14\ cm$ b) $28\ cm$ c) $49\ cm$ d) $11\ cm$

2- حديقة مربعة الشكل طولها $10\ m$ ، فإن مساحة الحديقة تساوى

a) $40\ m^2$ b) $20\ m^2$ c) $10\ m^2$ d) $100\ m^2$

3- مربع محيطه $12\ cm$ ، فإن طول ضلعه يساوى

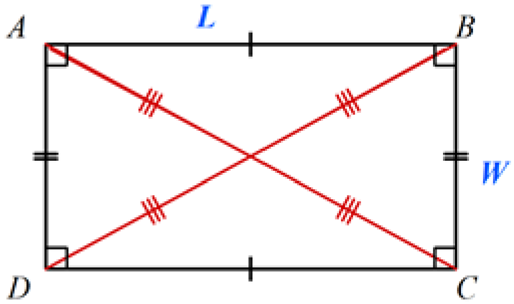
a) $3\ cm$ b) $7\ cm$ c) $4\ cm$ d) $12\ cm$

4- مربع مساحته $100\ cm^2$ ، فإن طول ضلع المربع يساوى

a) $20\ cm$ b) $100\ cm$ c) $4\ cm$ d) $10\ cm$

### 2.1.6 المستطيل:

المستطيل هو شكل رباعي له أربعة أضلاع كل ضلعين متقابلين متساويين وجميع زواياه قائمة ، كما في الشكل 6 -2




شكل $2-6$

مساحة و محيط المستطيل

إذا كان طول المستطيل $L$ و عرض المستطيل $W$ فإن:

مساحة المستطيل : $A = L \times W$

محيط المستطيل : $P = 2(L + W)$

**مثال 5:** احسب مساحة و محيط مستطيل طوله 3 cm و عرضه 2 cm ؟

الحل :

$$A = L \times W$$

$$A = 2 \times 3 = 6\ cm^2$$

إذا مساحة المستطيل تساوى $6\ cm^2$

$$P = (L + W) \times 2$$

$$P = (3 + 2) \times 2$$

$$P = 5 \times 2 = 10\ cm$$

إذا محيط المستطيل يساوى $10\ cm$

**مثال 6:** غرفة معيشة طولها 6 m و عرضها 4 m ، أوجد مساحتها و محيطها ؟

الحل :

$$A = L \times W$$

$$A = 6 \times 4 = 24\ m^2$$

إذا مساحة الغرفة تساوى $24\ m^2$

$$P = 2(L + W)$$
$$P = 2(6 + 4)$$
$$P = 2(10) = 20\ m$$

إذا محيط الغرفة يساوى $20\ m$

**تمرين6-2:** اختر الاجابة الصحيحة:

1- مستطيل طوله 5 cm و عرضه 3 cm فإن مساحته تساوى

a) $24\ cm^2$ b) $12\ cm^2$ c) $15\ cm^2$ d) $10\ cm^2$

2- مستطيل طوله 7 cm و عرضه 4 cm فإن محيطه يساوى

a) $14\ cm$ b) $22\ cm$ c) $14\ cm^2$ d) $12\ cm$

3- إذا كانت لدينا حديقة طولها 10 m و عرضها 5 m ، فإن مساحتها تساوى

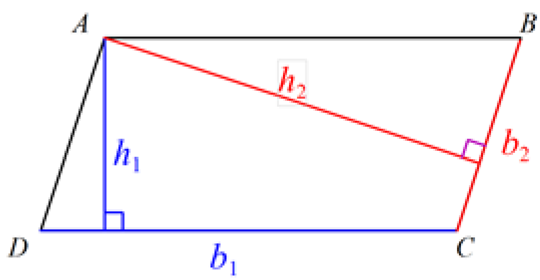
a) $10\ m^2$ b) $15\ m^2$ c) $25\ m^2$ d) $50\ m^2$

4 - إذا كانت لدينا حديقة طولها 10 m و عرضها 5 m ، فإن محيطها يساوى

a) $30\ m$ b) $15\ m$ c) $30\ m^2$ d) $10\ m$

### 3.1.6 متوازى الأضلاع :

هو عبارة عن شكل رباعي كل ضلعين متقابلين متوازيين ومتساويين في الطول و كل زاويتين متقابلتين متساويتين، كما في الشكل 3-6




شكل $3-6$

## مساحة و محيط متوازي

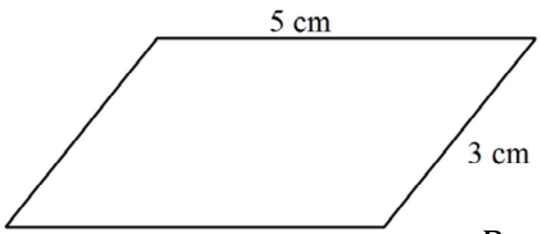
إذا كان طول القاعدة $b$ و الارتفاع المناظر له $h$

المحيط $P = AB + BC + CD + AD$

المساحة $A = b_1 \times h_1$

$A = b_2 \times h_2$

ملاحظه 1: القاعدة الصغرى $b_2$ يقابلها الارتفاع الأكبر $h_2$
و القاعدة الكبرى $b_1$ يقابلها الارتفاع الأصغر $h_1$



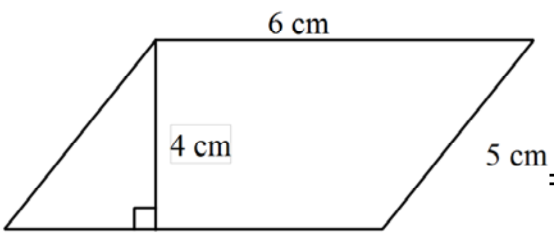

**مثال 7:** أوجد محيط متوازى الأضلاع من خلال الشكل المقابل

الحل :

$$P = 5 + 3 + 5 + 3 = 16\ cm$$

**مثال 8:** أوجد مساحة متوازى الأضلاع من خلال الشكل المقابل :

الحل :




$$A = b \times h$$
$$= 6 \times 4 = 24\ cm^2$$

**مثال 9:** متوازى الأضلاع طول ضلعين متجاورين فيه $8\ cm$ , $14\ cm$ احسب محيطه و مساحته إذا كان ارتفاعه الأصغر $5\ cm$ ؟

الحل :

المحيط $P = 2(\text{مجموع ضلعين متجاورين})$

$$P = 2(8 + 14) = 2(22) = 44\ cm$$

المساحة $A = b \times h$ ( الارتفاع الاصغر يقابل القاعدة الكبرى )

$A = 14 \times 5 = 70\ cm^2$

**مثال 10:** متوازى الأضلاع طول ضلعين متجاورين فيه $8\ cm, 10\ cm$ ، احسب مساحته إذا كان ارتفاعه الأكبر $6\ cm$ ؟

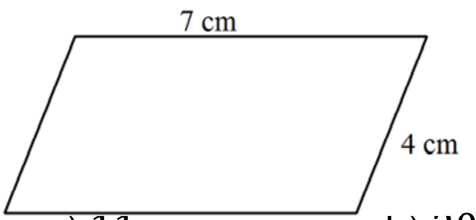
الحل :

الارتفاع الاكبر يقابل القاعدة الصغرى

$$A = b \times h$$
$$A = 8 \times 6 = 48\ cm^2$$

**تمرين 3-6:** إختر الاجابة الصحيحة :

1- محيط متوازى الأضلاع بالشكل المقابل يساوى

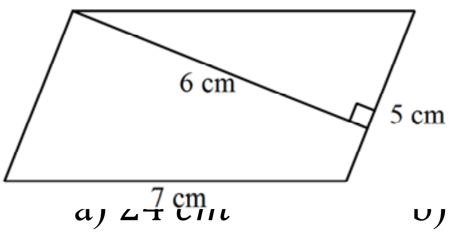



a) $11\ cm$  b) $20\ cm$  c) $22\ cm$  d) $7\ cm$

2- متوازى أضلاع طول قاعدته $6\ cm$ و طول الارتفاع المناظر للقاعده $3\ cm$ فإن مساحته تساوى

a) $18\ cm^2$  b) $20\ cm^2$  c) $9\ cm^2$  d) $17\ cm^2$

3- مساحة متوازى الأضلاع بالشكل المقابل يساوى




a) $24\ cm$  b) $20\ cm^2$  c) $30\ cm^2$  d) $42\ cm^2$

4- متوازى الأضلاع طول ضلعين متجاورين فيه $11\ cm, 5\ cm$ و إذا كان إرتفاعه الأصغر $4\ cm$ ، فإن مساحته تساوى ..........

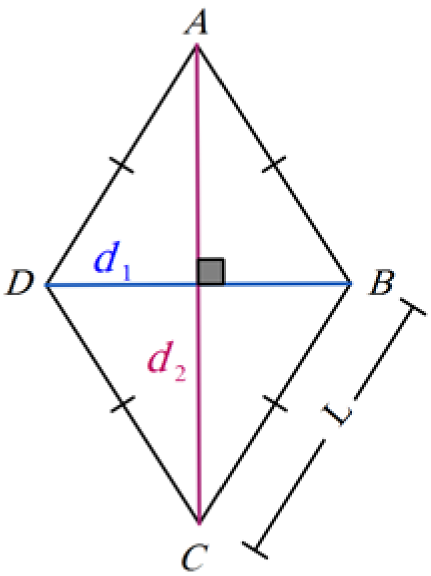
a) $32\ cm^2$  b) $20\ cm^2$  c) $40\ cm^2$  d) $44\ cm^2$

5- متوازى الأضــلاع طول ضــلعين متجاورين فيه $7\ cm, 12\ cm$ و إذا كان ارتفاعه الأكبر $5\ cm$ ، فإن مساحته تساوى ...............

a) $20\ cm^2$  b) $35\ cm^2$  c) $60\ cm^2$  d) $30\ cm^2$

### 4.1.6 المعين :

هو عبارة عن شكل رباعي جميع اضلاعه متساوية وكل زاويتين متقابلتين متساويتين كما في شكل كما في شكل 6 - 4




شكل $4-6$

مساحة ومحيط المعين

إذا كان طول ضلع المعين $L$ وقطراه $d_2 , d_1$

المحيط $P = AB + BC + CD + AD$

المساحة $A = \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$

**مثال 11:** أوجد محيط المعين الذى طول ضلعه $6\ cm$ ؟

الحل :

$$P = 4\,\mathrm{L}$$
$$P = 4 \times 6 = 24\ cm$$

**مثال 12:** أوجد مساحة المعين الذى طولا قطريه $7\ cm$ ، $4\ cm$ ؟

الحل :

$$A = \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$$
$$A = \frac{1}{2} \times 4 \times 7 = 14\ cm^2$$

**مثال 13:** معين محيطه 12 cm , أوجد طول ضلعه ؟

الحل :

$$P = 4\,\mathrm{L}$$
$$L = \frac{P}{4} = \frac{12}{4}$$
$$L = 3\ cm$$

إذا طول ضلع المعين يساوى $3\ cm$

**تمرين 4-6 :** اختر الاجابة الصحيحة :

1- معين طول ضلعه $7\ cm$ ، فإن محيطه يساوى

a) $7\ cm$ b) $8\ cm$ c) $49\ cm$ d) $28\ cm$

2- معين طولا قطريه $6\ cm$ ,$7\ cm$ فإن مساحة المعين تساوى

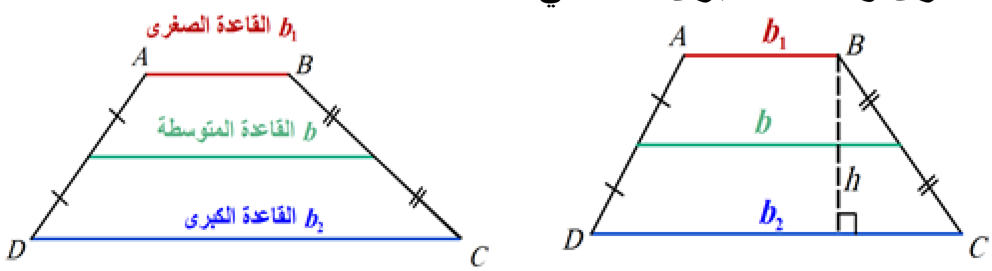
a) $42\ cm^2$ b) $13\ cm^2$ c) $21\ cm^2$ d) $50\ cm^2$

3 - معين محيطه $16\ cm$ ، فإن طول ضلعه يساوى

a) $16\ cm$ b) $8\ cm$ c) $2\ cm$ d) $4\ cm$

5.1.6 شبه المنحرف :

شبه المنحرف هو شكل رباعي فيه ضلعان فقط متوازيان يسميان قاعدتي شبه المنحرف القاعدة الصغرى والقاعدة الكبرى ، كما في الشكل 6 - 5




شكل 6 – 5

### مساحة ومحيط شبه المنحرف

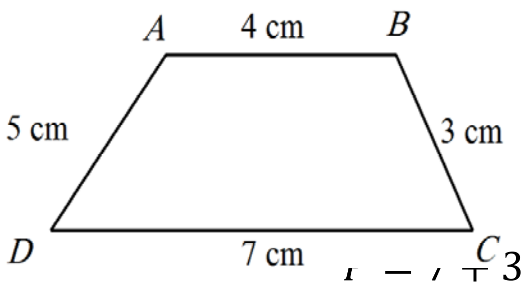
إذا كان طول القاعدة الصغرى $b_1$ وطول القاعدة الكبرى $b_2$ وطول القاعدة المتوسطة $b$ و الارتفاع $h$

محيط شبه المنحرف: $P = AB + BC + CD + AD$

مساحة شبه المنحرف: $A = b \times h$

$$A = \frac{1}{2} \times (b_1 + b_2) \times h$$

**مثال 14:** أوجد محيط شبه المنحرف بالشكل المقابل ؟




الحل :

$$P = 7 + 3 + 4 + 5 = 19\ cm$$

**مثال 15:** شـبه منحرف طول قاعدته المتوسـطة $17\ cm$ و إرتفاعه $11\ cm$ ، أوجد مسـاحة شبه المنحرف ؟ .

الحل :

$$A = b \times h$$
$$A = 17 \times 11 = 187\ cm^2$$

**مثال 16:** أوجد مسـاحة شـبه المنحرف الذى طول قاعدته الصـغرى $3\ cm$ وقاعدته الكبرى $5\ cm$ و طول ارتفاعه $4\ cm$ ؟

الحل :

$$A = \frac{1}{2} \times (b_1 + b_2) \times h$$
$$A = \frac{1}{2} \times (3 + 5) \times 4 = 16\ cm^2$$

**تمرين 6-5:** اختر الاجابة الصحيحة :

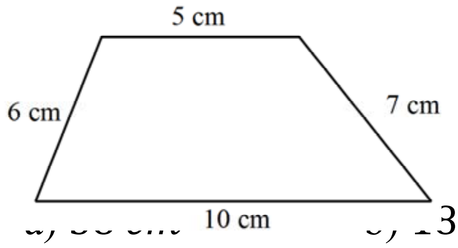
1- شبه منحرف طول قاعدته المتوسطة $6\ cm$ و طول ارتفاعه $5\ cm$ ، فإن مساحته تساوى

a) $25\ cm^2$ b) $11\ cm$ c) $30\ cm^2$ d) $20\ cm^2$

2- شبه منحرف طول قاعدتيه الكبرى والصغرى $7\ cm$ , $5\ cm$ و طول إرتفاعه $4\ cm$ فإن مساحته تساوى

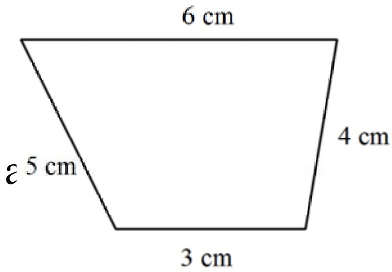
a) $24\ cm^2$ b) $12\ cm$ c) $28\ cm^2$ d) $20\ cm^2$

3- محيط شبه المنحرف بالشكل المقابل يساوى




b) $13\ cm$ c) $27\ cm$ d) $28\ cm$

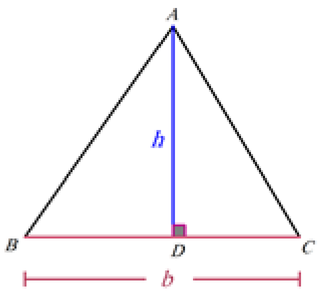
4- محيط شبه المنحرف المقابل يساوى




$8\ cm$ c) $15\ cm$ d) $20\ cm$

### 6.1.6 المثلث :

المثلث هو مضلع يتكون من ثلاث أضلاع و ثلاث زوايا ومجموع زوايا المثلث الداخلية تساوى $180°$ كما في الشكل 6 - 6




شكل $6-6$

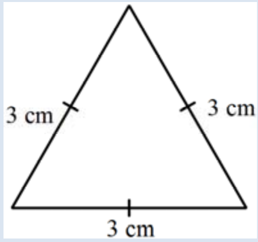
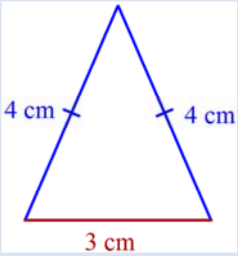
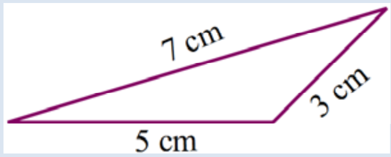
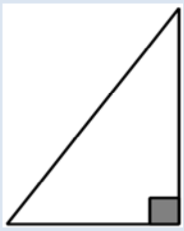
**مساحة ومحيط المثلث**

إذا كان طول القاعدة للمثلث $b$ وارتفاع المثلث $h$ :

محيط المثلث : $P = AC + BC + AB$

مساحة المثلث: $A = \frac{1}{2} \times b \times h$

**أنواع المثلثات :**

| | |
|---|---|
| 1- مثلث متساوي الأضلاع<br><br> | 2- مثلث متساوي الساقين<br><br> |
| 3- مثلث مختلف الأضلاع<br><br> | 4- مثلث قائم الزاوية<br> |

**مثال 17:** أوجد محيط المثلث الذى أطوال أضلاعه $5\ cm$ , $4\ cm$ , $3\ cm$ ؟

الحل :

$$P = 3 + 4 + 5 = 12 \text{ cm}$$

**مثال 18:** أوجد مساحة المثلث الذى طول قاعدته $12\ cm$ و طول ارتفاعه $8\ cm$ ؟

الحل :

$$A = \frac{1}{2} \times b \times h$$

$$A = \frac{1}{2} \times 12 \times 8 = 48\ cm^2$$

**مثال 19:** مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه $7\ cm$ ، احسب محيط و مساحة المثلث إذا كان طول ارتفاعه $8\ cm$ ؟

الحل :

$$P = 7 + 7 + 7 = 3(7) = 21\ cm$$

$$A = \frac{1}{2} \times b \times h$$

$$A = \frac{1}{2} \times 7 \times 8 \quad = 28\ cm^2$$

**تمرين6-6 :** اختر الاجابة الصحيحة :

1- مثلث أطوال أضلاعه $4\ cm$ , $3\ cm$ , $4\ cm$ ، فإن محيطه يساوى

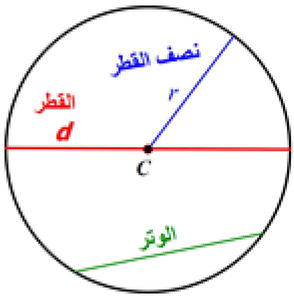
a) $7\ cm$ b) $8\ cm$ c) $48\ cm$ d) $11\ cm$

2- مثلث طول قاعدته $8\ cm$ , و طول إرتفاعه $3\ cm$ فإن مساحته تساوى

a) $12\ cm^2$ b) $12\ cm$ c) $24\ cm^2$ d) $11\ cm^2$

### 7.1.6 الدائرة :

هى مجموعة النقاط التى تبعد نفس البعد عن نقطه ثابته ، و هذه النقطة تسمى مركز الدائرة و البعد الثابت يسمى نصف القطر .




شكل 6 – 7

مساحة و محيط الداائ ة

إذا كان $r$ طول نصف قطر الدائرة فإن:

مساحة الدائرة : $A = \pi\, r^2$

محيط الدائرة : $P = 2\, \pi\, r$

حيث π هى نسبة محيط الدائرة إلى قطرها ( النسبة التقريبية ) تساوى :

$$\pi = \frac{22}{7} \approx 3.14$$

**مثال 20:** أوجد محيط و مساحة الدائرة التى طول نصف قطرها $7\ cm$ ؟

الحل :

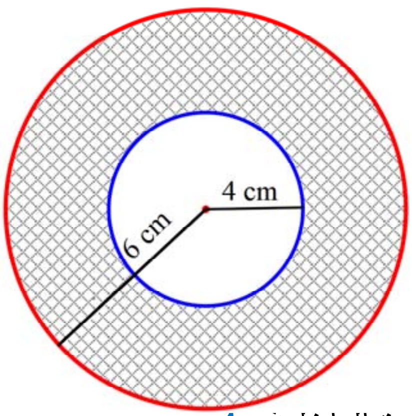
$$C = 2\, \pi\, r$$

$$C = 2 \times \frac{22}{7} \times 7 = 44\ cm$$
$$A = \pi\, r^2$$
$$A = \frac{22}{7} \times \ (7)^2 = 154\ cm^2$$

**مثال 21:** دائرة طول قطرها $20\ cm$ ، أوجد محيط و مساحة الدائرة ؟
الحل :
طول القطر يساوي $20\ cm$ إذاً نصف القطر يساوي $10\ cm$ $= r$
$$C = 2\,\pi\, r$$
$$C = 2 \times \frac{22}{7} \times 10 = 62.85\ cm$$
إذا محيط الدائرة يساوي $62.85\ cm$
$$A = \pi\, r^2$$
$$A = \frac{22}{7} \times \ (10)^2 = 314.28\ cm^2$$
إذا مساحة الدائرة تساوي $346.5\ cm^2$

**مثال 22 :** حديقة دائرية الشكل طول محيطها $66\ m$ ، أوجد مساحة الحديقة ؟
الحل :
$$C = 2\,\pi\, r$$
$$r = \frac{C}{2\pi} = \frac{66}{2 \times 3.14} \approx 10.5\ m$$
$$A = \pi\, r^2 = 3.14 \times (10.5)^2 = 346.2\ m^2$$

**مثال 23:** أوجد مساحة الجزء المظلل بالشكل المقابل ؟
$$\pi \approx 3.14$$




الحل :
مساحة الجزء المظلل A ، مساحة الدائرة الخارجية $A_1$
، مساحة الدائرة الداخلية $A_2$
مساحة الجزء المظلل = مساحة الدائرة الخارجية $A_1$ − مساحة الدائرة الداخلية $A_2$

$$A_1 = \pi\, r^2 = 3.14 \times (6)^2 = 113.04\ cm^2$$
$$A_2 = \pi\, r^2 = 3.14 \times (4)^2 = 50.24\ cm^2$$
$$A = A_1 - A_2 = 113.04 - 50.24 = 62.8\ cm^2$$

**تمرين 6-7 :** اختر الاجابة الصحيحة :

1- دائرة نصف قطرها يساوى $8\ cm$ ، فإن محيطها يساوى

a) $62.8\ cm$ b) $68.2\ cm$ c) $50.24\ cm$ d) $10\ cm$

2- دائرة نصف قطرها يساوى $3\ cm$ ، فإن مساحتها تساوى ...............

a) $9\pi\ cm^2$ b) $3\pi\ cm^2$ c) $9\ cm^2$ d) $6\pi\ cm^2$

3- دائرة طول قطرها يساوى $14\ cm$ ، فإن طول نصف قطرها يساوى ...............

a) $28\ cm$ b) $14\ cm$ c) $2\ cm$ d) $7\ cm$

4- دائرة طول نصف قطرها يساوى $8\ cm$ ، فإن طول قطرها يساوى ...............

a) $8\ cm$ b) $16\ cm$ c) $12\ cm$ d) $4\ cm$

**تمارين ( 6- 8 )**

**اختر الإجابة الصحيحة مما يلي :**

1- محيط الدائرة =

a) $2\,\pi\, r$ b) $\pi\, r^2$ c) $\pi\, d$ d) $\pi$

2- مساحة الدائرة =

a) $\pi\, r^2$ b) $2\,\pi\, r$ c) $\pi\, d$ d) $\pi$

3- إذا كان مربع طول ضلعه $5\ cm$ فإن محيطه يساوى

a) $20\ cm$ b) $25\ cm$ c) $10\ cm$ d) $15\ cm$

4- إذا كان مربع طول ضلعه $8\ cm$ فإن مساحته تساوى

a) $64\ cm^2$ b) $28\ cm^2$ c) $24\ cm^2$ d) $32\ cm^2$

5- إذا كان مستطيل طوله 10 cm و عرضه 5 cm فإن محيطه يساوى

a) $30\ cm$ b) $15\ cm$ c) $50\ cm$ d) $10\ cm$

6- إذا كان مستطيل طوله 7 cm و عرضه 3 cm فإن مساحته تساوى ................

a) $15 cm^2$ b) $10\ cm^2$ c) $20\ cm^2$ d) $21\ cm^2$

7- إذا كان معين محيطه $28\ cm$ ، فإن طول ضلع المعين يساوى

a) $7\ cm$ b) $24\ cm$ c) $4\ cm$ d) $8\ cm$

8- إذا كان مثلث أطوال أضـــلاعه $4\ cm$ , $7\ cm$ , $5\ cm$ ، فإن محيطه يســـاوى ...........

a) $15\ cm$ b) $12\ cm$ c) $16\ cm$ d) $100\ cm$

9- مساحة المثلث =

a) $\frac{1}{2} \times b \times h$ b) $b \times h$ c) $s \times 4$ d) $L \times W$

10- إذا كان مثلث طول قاعدته $10\ cm$ و إرتفاعه $7\ cm$ فإن مســـاحته تســـاوى .............

a) $21\ cm^2$ b) $70\ cm^2$ c) $17\ cm^2$ d) $35\ cm^2$

11- إذا كان مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه $4\ cm$ فإن محيطه يساوى ............

a) $16\ cm$ b) $12\ cm$ c) $40\ cm$ d) $8\ cm$

12- إذا كان مربع مساحته $16\ cm^2$ ، فإن طول ضلعه يساوى ..........

a) $12\ cm$ b) $3\ cm$ c) $8\ cm$ d) $4\ cm$

13- إذا كان مربع محيطه $32\ cm$ ، فإن طول ضلعه يساوى ..........

a) $8\ cm$ b) $7\ cm$ c) $32\ cm$ d) $4\ cm$

14- إذا كان شـــبه منحرف طول قاعدتيه الصـــغرى و الكبرى $4\ cm$, $6\ cm$ و طول إرتفاعه $7\ cm$ فإن مساحته تساوى

a) $30\ cm^2$ b) $42\ cm^2$ c) $35\ cm^2$ d) $28\ cm^2$

15- إذا كان شبه منحرف طول قاعدته المتوسطة $11\ cm$ و طول ارتفاعه $7\ cm$ ، فإن مساحته

a) $77\ cm^2$ b) $18\ cm^2$ c) $4\ cm^2$ d) $9\ cm^2$

16- إذا كان معين طول ضلعه $4\ cm$ ، فإن محيطه يساوى ...........

a) $12\ cm$ b) $8\ cm$ c) $40\ cm$ d) $16cm$

17- مساحة المستطيل = ................

a) $L \times W$ b) $2(L+W)$ c) $L \times 4$ d) $\pi\ r^2$

18- إذا كان معين طولا قطريه $8\ cm$ , $5\ cm$ ، فإن مساحته تساوى ..............

a) $10\ cm^2$ b) $40\ cm^2$ c) $4\ cm^2$ d) $20\ cm^2$

19- إذا كانت دائرة نصف قطرها $3\ cm$ ، فإن طول قطرها يساوى

a) $6\ cm$ b) $9\ cm$ c) $3\ cm$ d) $5\ cm$

20- إذا كانت دائرة طول قطرها $10\ cm$ ، فإن طول نصف قطرها

a)$10\ cm$ b) $5\ cm$ c) $3\ cm$ d) $2\ cm$

21- إذا كان متوازى الأضلاع طولا ضلعين متجاورين $4\ cm$ , $7\ cm$ فإن محيط متوازى الأضلاع يساوى

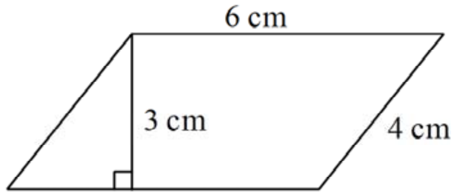
a) $22\ cm$ b) $11\ cm$ c) $28\ cm$ d) $3\ cm$

22- إذا كان دائرة طول نصف قطرها يساوى $2\ cm$ ، فإن محيط الدائرة =

a) $4\ cm$ b) $12.56\ cm$ c) $3.14\ cm$ d) $10\ cm$

23- إذا كان دائرة طول نصف قطرها يساوى $5\ cm$ ، فإن مساحة الدائرة = ..............

a) $78.5\ cm^2$ b) $31.4\ cm^2$ c) $25\ cm^2$ d) $3.14\ cm^2$



24- مساحة متوازى الأضلاع بالشكل المقابل =

a) $24\ cm^2$ b) $12\ cm^2$ c) $18\ cm^2$ d) $13\ cm^2$

25- متوازي الأضلاع طول ضلعين متجاورين فيه $6\ cm$ , $10\ cm$ و إذا كان إرتفاعه الأصغر $4\ cm$ ، فإن مساحته تساوى ...............

a) $24\ cm^2$ b) $40\ cm^2$ c) $60\ cm^2$ d) $240\ cm^2$

26- متوازي الأضلاع طول ضلعين متجاورين فيه $6\ cm$ , $10\ cm$ و إذا كان إرتفاعه الأكبر $5\ cm$ ، فإن مساحته تساوى ...............

a) $30\ cm^2$ b) $21\ cm^2$ c) $60\ cm^2$ d) $50\ cm^2$

27- مساحة متوازي الأضلاع = ................

a) $b \times h$ b) $\frac{1}{2} \times b \times h$ c) $S^2$ d) $L \times W$

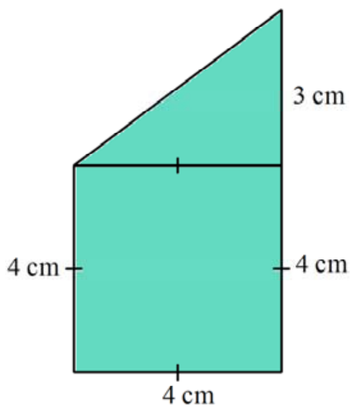
28- مساحة المعين = ................

a) $b \times h$ b) $\frac{1}{2} \times b \times h$ c) $\frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$ d) $L \times W$

29- إذا كان دائرة طول قطرها $6\ cm$ ، فإن محيط الدائرة يساوى .........

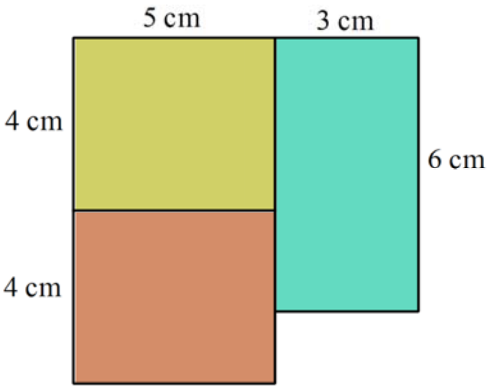
a) $18.84\ cm$ b) $3.14\ cm$ c) $36\ cm$ d) $3\ cm$

30- مساحة الشكل المقابل = ...............



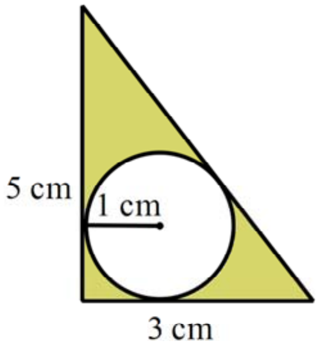
a) $20\ cm^2$ b) $15\ cm^2$ c) $18\ cm^2$ d) $22\ cm^2$

31- بيت مكون من ثلاث غرف كما بالشكل المقابل
فإن مساحة البيت = ...............



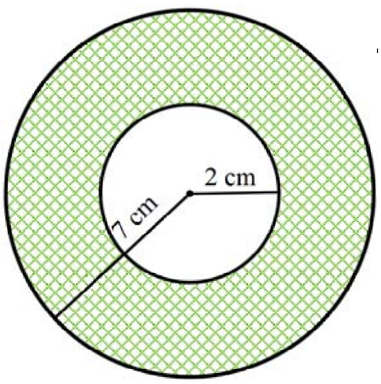

a) $38\ cm^2$ b) $16\ cm^2$ c) $22\ cm^2$ d) $58\ cm^2$

32- مساحة الجزء المظلل = ...............




a) $15\ cm^2$ b) $4.36\ cm^2$ c) $14\ cm^2$ d) $9\ cm^2$

33- مساحة الجزء المظلل بالشكل المقابل = .............



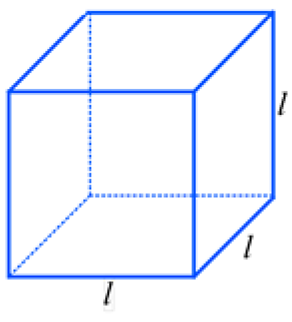

a) $141.3\ cm^2$ b) $114.3\ cm^2$ c) $14\ cm^2$ d) $9\ cm^2$

## 2.6الهندسة الفراغية

درسنا الهندسة المستوية التي لها بعدان فقط هما الطول والعرض، أما في الهندسة الفراغية فإننا سوف ندرس المجسمات أو الاشكال الثلاثية الابعاد التي ابعادها هي الطول والعرض والارتفاع.

### 1.2.6المكعب :

المكعب هو جسم له ستة أوجه متطابقة، كل وجه منها عبارة عن مربع و كل أحرفه الجانبية متساوية و أي مربعين متقابلين يسميان بقاعدتي المكعب ، كما في الشكل 6 – 8



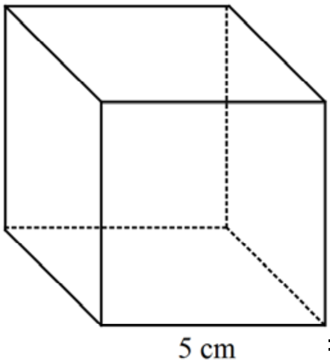

شكل 6 – 8

## مساحة وحجم المكعب

إذا كان طول حرف المكعب $l$

المساحة $S.A = 6\,l^2$

الحجم $V = l^3$



**مثال 24:** مكعب طول حرفه $5\ cm$ ،
أوجد مساحته سطحه و حجمه ؟

الحل :

: $6\,l^2$

$$S.A = 6 \times (5)^2 = 150\ cm^2$$

الحجم $V = l^3 = (5)^3 = 125\ cm^3$

**مثال 25:** وعاء مكعب الشكل طول حرفه $7\ cm$ ، أوجد مساحته سطحه و حجمه ؟

الحل :

$$S.A = 6\,l^2 = 6 \times (7)^2 = 294\ cm^2$$
$$V = l^3 = (7)^3 = 343\ cm^3$$

**مثال 26:** مكعب حجمه $27\ cm^3$ ، أوجد طول حرفه ؟

الحل :

$$V = l^3$$
$$l = \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{27} = 3\ cm$$

إذا طول حرف المكعب $3\ cm$

**مثال 27:** مكعب مساحته $24\ cm^2$ ، أوجد طول حرفه .

الحل :

$$S.A = 6\,l^2$$
$$6\,l^2 = 24$$

$$l^2 = \frac{24}{6} = 4$$

$$l = \sqrt{4} = 2\ cm$$

إذا طول حرف المكعب $2\ cm$

**تمرين 6-9:** إختر الاجابة الصحيحة :

1- إذا كان مكعب طول حرفه $4\ cm$ ، فإن حجمه يساوى

a) $16\ cm^3$  b) $32\ cm^2$  c) $64\ cm^3$  d) $12\ cm^3$

2- إذا كان مكعب طول حرفه $6\ cm$ ، فإن مساحة سطحه تساوى

a) $6\ cm^2$  b) $36\ cm^2$  c) $12\ cm^2$  d) $216\ cm^3$

3- إذا كان مكعب حجمه $8\ cm^3$ ، فإن طول حرفه يساوى

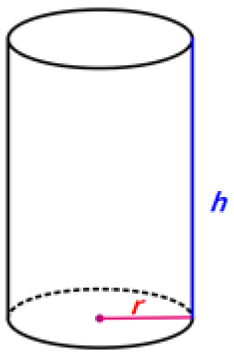
a) $12\ cm$  b) $4\ cm$  c) $8\ cm$  d) $2\ cm$

4- إذا كان مكعب مساحة سطحه $216\ cm^2$ ، فإن طول حرفه يساوى .....................

a) $4\ cm$  b) $6\ cm$  c) $8\ cm$  d) $5\ cm$

2.2.6 الأسطوانة :

الأسطوانة هي جسم له سطح منحنى مغلق وقاعدته عبارة عن دائرتين متطابقتين ومتوازيتين.
من الممكن الحصول على شكل الأسطوانة من دوران مستطيل حول أحد أضلاعه دورة كاملة.
ارتفاع الأسطوانة هو العمود الواصل بين مركزي دائرتي قاعدتي الأسطوانة، كما في الشكل 6 - 9




شكل 6 – 9

مساحة وحجم الاسطوانة

إذا كان نصف قطر القاعدة $r$ و الارتفاع $h$ فإن:

المساحة $S.A = 2\pi r(h + r)$

الحجم $V = \pi r^2 h$

**مثال 28:** أسطوانة نصف قطر قاعدتها $9\ cm$ و إرتفاعها $11\ cm$ ، أوجد مساحة سطحه وحجم الأسطوانة ؟.

الحل :

$$S.A = 2\pi r(h + r) = 2 \times 3.14 \times 9 \times (11 + 9)$$
$$S.A = 1130.4\ cm^2$$

إذا مسحة السطح تساوى $1130.4\ cm^2$

$$V = \pi r^2 h$$
$$V = 3.14 \times (9)^2 \times 11 = 2797.74\ cm^3$$

إذا الحجم يساوى $2797.74\ cm^3$

**تمرين 6-10:** إختر الاجابة الصحيحة :

1- إذا كانت إسطوانة إرتفاعها $7\ cm$ و نصف قطرها $5\ cm$ فإن مساحة سطحه تساوى ..............

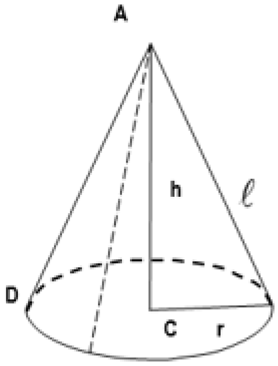
a) $376.8\ cm^2$ b) $366.8\ cm^2$ c) $35\ cm^2$ d) $12\ cm^2$

2- إذا كانت إسطوانة إرتفاعها $20\ cm$ و نصف قطرها $6.5\ cm$ فإن حجم الاسطوانه تساوى ....................

a) $2653.3\ cm^3$ b) $130\ cm^3$ c) $100\ cm^3$ d) $65.2\ cm^3$

3.2.6 المخروط :

المخروط هو جسم يتألف من قاعدة واحدة عبارة عن دائرة نصف قطرها $r$ ، و رأس بعده العمودى عن الدائرة يسمى ارتفاع المخروط، كما في الشكل $6-10$




شكل $6-10$

**مساحة وحجم المخروط**

إذا كان نصف قطر القاعدة $r$ والارتفاع $h$ و $l$ طول المولد فإن :

المساحة
$$S.A = \pi r l + \pi r^2$$
$$= \pi r(l + r)$$

الحجم
$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

**مثال 29 :** مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته 14 cm و طول ارتفاعه 11 cm وطول المولد 10 cm احسب مساحة سطحه وحجمه ؟

.

الحل :

المساحة

$$S.A = \pi\, r\, l + \pi r^2 = \pi r(\ l + r\ )$$
$$S.A = 3.14 \times 14(\ 10 + 14\ ) = 615.44\ \ cm^2$$

الحجم

$$V = \frac{1}{3}\,\pi\, r^2\, h$$
$$V = \frac{1}{3} \times 3.14 \times (14)^2 \times 11 = 2256.61\ cm^3$$

**تمرين 6-11:** اختر الاجابة الصحيحة :

1- إذا كان مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته 9 cm و طول المولد 11 cm , فإن مساحة سطحه تساوى

a) $461.58\ cm^2$ b) $207.24\ cm^2$ c) $565.2\ cm^2$ d) $100\ cm^2$

2- إذا كان مخروط دائرى قائم نصف قطر قاعدته 8 cm و طول إرتفاعه 12 cm , فإن الحجم يساوى

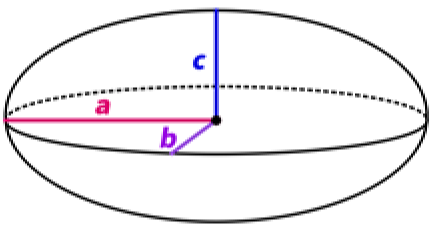
a) $96\ cm^3$ b) $803.84\ cm^3$ c) $66.9\ cm^3$ d) $20\ cm^3$

4.2.6 البيضاوي:

هو المنحني المستوي الذي يحقق الخاصية التالية:

مجموع بُعد أي نقطة على هذا المنحنى عن نقطتين ثابتين داخله يبقى ثابتا .

و الشكل الهندسي البيضاوي ( كرة مضغوطة بانتظام ) و المتماثل بالنسبة لمحورية الرئيسي و الثانوي .




شكل 6 – 11

## مساحة وحجم البيضاوي

إذا كان $a , b , c$ أنصاف أقطار البيضاوي فإن:

المساحة

$$S.A = 4\pi \left( \frac{(ab)^{1.6}+(ac)^{1.6}+(bc)^{1.6}}{3} \right)^{0.625}$$

الحجم

$$V = \frac{4}{3}\pi\, a\, b\, c$$

**مثال 30:** بيضاوي أنصاف أقطاره $a = 21\ cm\ , b = 15\ cm\ , c = 2\ cm$
احسب مساحة البيضاوي وحجمه ؟

الحل :

مساحة البيضاوي

$$S.A = 4\pi \left( \frac{(ab)^{1.6}+(ac)^{1.6}+(bc)^{1.6}}{3} \right)^{0.625}$$

$$S.A = 4 \times 3.14 \left( \frac{(21\times 15)^{1.6}+(21\times 2)^{1.6}+(15\times 2)^{1.6}}{3} \right)^{0.625}$$

$$S.A \approx 2068.67\ cm^2$$

حجم البيضاوي

$$V = \frac{4}{3}\pi\, a\, b\, c$$

$$V = \frac{4}{3} \times 3.14 \times 21 \times 15 \times 2 = 2640\ cm^3$$

**مثال 31:** بيضاوي أنصاف أقطاره $a = 12\ cm\ , b = 10\ cm\ , c = 9\ cm$
احسب مساحة البيضاوي وحجمه ؟

الحل :

مساحة البيضاوي

$$S.A = 4\pi \left( \frac{(ab)^{1.6} + (ac)^{1.6} + (bc)^{1.6}}{3} \right)^{0.625}$$

$$S.A = 4 \times 3.14 \left( \frac{(12 \times 10)^{1.6} + (12 \times 9)^{1.6} + (10 \times 9)^{1.6}}{3} \right)^{0.625}$$

$$S.A \approx 1336.78\ cm^2$$

حجم البيضاوي

$$V = \frac{4}{3}\ \pi\ a\ b\ c$$

$$V = \frac{4}{3} \times\ 3.14 \times 12 \times 10 \times 9 = 4521.6\ \ cm^3$$

**تمرين 6-12:** اختر الاجابة الصحيحة :

1- إذا كان بيضاوي أنصاف أقطاره $a\ =\ 9\ cm\ , b =\ 6\ cm\ ,\ c\ =\ 3\ cm$
فإن مساحة البيضاوي =

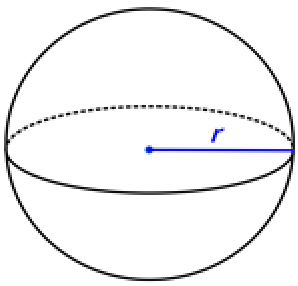
a) $440.75\ cm^2$ b) $18\ cm^2$ c) $162\ cm^2$ d) $200.5\ cm^2$

2- إذا كان بيضاوي أنصاف أقطاره $a\ =\ 12\ cm\ , b =\ 10\ cm\ ,\ c\ =\ 6\ cm$
فإن حجم البيضاوي = .

a) $3015.92\ cm^3$ b) $207.24\ cm^2$ c) $28\ cm^2$ d) $720\ cm^2$

5.2.6 الكرة :

الكرة هي جسم ذات سطح منحنى مغلق متماثل بحيث تكون كل نقطة من نقاط هذا السطح تبتعد بعدا ثابتا عن نقطة ثابته داخل الكرة و تسمى هذه النقطة بمركز الكرة كما في الشكل 6 - 12




شكل 6 – 12

## مساحة وحجم الكرة

إذا كان نصف قطر الكرة $r$ فإن :

المساحة $S.A = 4\,\pi\,r^2$

الحجم $V = \frac{4}{3}\,\pi\,r^3$

**مثال 32:** كرة نصف قطرها $17\ cm$ ، احسب كلا من حجمها و مساحة سطحه.

الحل :

$S.A = 4\,\pi\,r^2$

$S.A = 4 \times 3.14 \times (17)^2 = 3631.68\ cm^2$

$V = \frac{4}{3}\,\pi\,r^3$

$V = \frac{4}{3} \times 3.14 \times (17)^3 = 20569.09\ cm^3$

**مثال 33:** كرة نصف قطرها $10\ cm$ ، احسب كلا من حجمها و مساحتها السطحية .

الحل :

$S.A = 4\,\pi\,r^2$

$S.A = 4 \times 3.14 \times (10)^2 = 1256\ cm^2$

$V = \frac{4}{3}\,\pi\,r^3$

$V = \frac{4}{3} \times 3.14 \times (10)^3 \approx 4186.7\ cm^3$

**تمرين 13-6 :** اختر الاجابة الصحيحة :

1- إذا كانت كرة نصف قطرها $3\ cm$ ، فإن حجمها يساوى

a) $27.3\ cm^3$ b) $121.05\ cm^3$ c) $30\ cm^3$ d) $113.04\ cm^3$

2- إذا كانت كرة نصف قطرها $4\ cm$ ، فإن مساحتها تساوي

a) $200.96\ cm^2$ b) $130\ cm^2$ c) $100\ cm^2$ d) $267.9\ cm^2$

## تمارين ( 6- 14 )

1- حجم المكعب = .....................

a) $l^3$ b) $4\,l^2$ c) $6\,l^2$ d) $2\,\pi r$

2- مساحة المكعب = .....................

a) $4\,l^2$ b) $l^3$ c) $6\,l^2$ d) $\pi$

3- إذا كان مكعب طول حرفه $5\ cm$ فإن حجمه يساوى .....................

a) $64\ cm^3$ b) $16\ cm^3$ c) $20\ cm^3$ d) $125\ cm^3$

4- إذا كان مكعب طول ضلعه $8\ cm$ فإن مساحته تساوى .....................

a) $256\ cm^2$ b) $64\ cm^2$ c) $384\ cm^2$ d) $32\ cm^2$

5- حجم متوازي المستطيلات = .....................

a) $l \times w \times h$ b) $l^3$ c) $2\,\pi r$ d) $6\,l^2$

6 – إذا كن متوازي مستطيلات أبعاده الثلاثة هي $4\ cm\ , 5\ cm\ , 8\ cm$ ، فإن حجمه يساوى

a) $160\ cm^3$ b) $17\ cm^3$ c) $20\ cm^3$ d) $12\ cm^3$

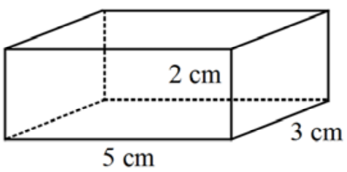
7- إذا كان مكعب طول ضلعه $6\ cm$ فإن مساحته ا تساوى .....................

a) $216\ cm^2$ b) $36\ cm^2$ c) $6\ cm^2$ d) $18\ cm^2$

8- إذا كانت كرة نصف قطرها $3\ cm$ ، فإن حجمها يساوى .....................

a) $113.04\ cm^3$ b) $3\ cm^3$ c) $27\ cm^3$ d) $100\ cm^3$

9- مساحة متوازي المستطيلات بالشكل المقابل تساوى ...............




a) $62\ cm^2$ b) $36\ cm^2$ c) $10\ cm^2$ d) $30\ cm^2$

10- إذا كان مكعب مساحته $216\ cm^2$ ، فإن طول حرفه يساوى .....................

a) $6\ cm$ b) $5\ cm$ c) $4\ cm$ d) $8\ cm$

11- حجم الاسطوانة = ................

a) $\pi\ r^2\ h$ b) $\pi\ r^2$ c) $6\ l^2$ d) $\frac{1}{3}\ \pi\ r^2\ h$

12- إذا كان مكعب حجمه $27\ cm^3$ ، فإن طول حرفه يساوى

a) $3\ cm$ b) $7\ cm$ c) $2\ cm$ d) $4\ cm$

13- إذا كانت كرة نصف قطرها $6\ cm$ ، فإن مساحتها تساوى ......................

a) $452.16\ cm^2$ b) $450\ cm^2$ c) $216\ cm^2$ d) $36\ cm^2$

14- إذا كان مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته 9 cm و طول المولد 13 cm , فإن مساحته تساوى ...............

a) $621.72\ cm^2$ b) $400.26\ cm^2$ c)$244.92\ cm^2$ d) $78\ cm^2$

15- حجم المخروط = .................

a) $\frac{1}{3}\ \pi\ r^2\ h$ b) $\frac{4}{3}\ \pi\ r^3$ c) $\frac{1}{3}\ \pi\ r^2\ h$ d) $\pi\ r^2$

16- إذا كان مخروط دائري قائم نصــف قطر قاعدته 9 cm و طول ارتفاعه 13 , cm فإن حجم المخروط يساوى ...............

a) $1102.14\ cm^3$ b) $1100\ cm^3$ c) $78\ cm^3$ d) $4\ cm^3$

17- إذا كانت أسطوانة ارتفاعها $15\ cm$ و نصف قطرها $5\ cm$ فإن حجم الأسطوانة تساوى

a) $1177.5\ cm^3$ b) $177.5\ cm^3$ c) $375\ cm^3$ d) $20\ cm^3$

18- إذا كان بيضاوي أنصاف أقطاره $a = 9\ cm\ , b = 5\ cm\ ,\ c = 2\ cm$ فإن حجم البيضاوي = ...............

a) $376.8\ cm^3$ b) $177.5\ cm^3$ c) $16\ cm^3$ d) $90\ cm^3$

19- حجم البيضاوي =

a) $\frac{4}{3}\ \pi\ \mathrm{a}\ b\ c$ b) $\frac{4}{3}\ \pi\ r^3$ c) $\frac{1}{3}\ \pi\ r^2\ h$ d) $\pi\ r^2$

20- إذا كان بيضاوي أنصاف أقطاره $a = 10\ cm\ , b = 7\ cm\ , c = 3\ cm$
فإن مساحة البيضاوي $\approx$ ...............

a) $547.65\ cm^2$ b) $400.26\ cm^2$ c) $246.87\ cm^2$ d) $210\ cm^2$

<table>
<tr><td colspan="6">نموذج تقييم المتدرب لمستوى أدائه<br>يعبأ من قبل المتدرب نفسه وذلك بعد الانتهاء من تمارين الوحدة</td></tr>
<tr><td colspan="6">بعد الانتهاء من التدرب على وحدة الهندسة المستوية والفراغية، قيم نفسك وقدراتك بواســطة إكمال هذا التقييم الذاتي بعد كل عنصر من العناصر المذكورة، وذلك بوضع عــــلامة (✓) أمام مستوى الأداء الذي أتقنته، وفي حالة عدم قابلية المهمة للتطبيق ضع العلامة في الخانة الخاصة بذلك.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">م</td><td rowspan="2">العناصـــــر</td><td colspan="4">مستوى الأداء (هل أتقنت الأداء)</td></tr>
<tr><td>غير قابل للتطبيق</td><td>لا</td><td>جزئيا</td><td>كليا</td></tr>
<tr><td>1</td><td>تعريف الاشكال الهندسية المستوية (الأشكال الرباعية-المثلث-الدائرة)</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>حساب المساحة والمحيط للأشكال الهندسية المستوية.</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>تمييز اشكال الهندسة الفراغية (المكعب- الأسطوانة - البيضاوي-المخروط)</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>حساب المساحة والحجم للأشكال الهندسية الفراغية</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>تمييز الأشكال الهندسية من الأشكال الفراغية</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>تمييز العمليات الأولية عند العمليات الحسابية</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="6">يجب أن تصل النتيجة لجميع المفردات (البنود) المذكورة إلى درجة الإتقان الكلي أو أنها غير قابلة للتطبيق، وفي حالة وجود مفردة في القائمة "لا" أو "جزئيا" فيجب إعادة التدرب على هذا النشاط مرة أخرى بمساعدة المدرب.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="6">نموذج تقييم المدرب لمستوى أداء المتدرب<br>يعبأ من قبل المدرب وذلك بعد الانتهاء من تمارين الوحدة</td></tr>
<tr><td colspan="2">اسم المتدرب : ..........................................................</td><td colspan="4">التاريخ: .....................................</td></tr>
<tr><td colspan="2">رقم المتدرب : ..........................................................</td><td colspan="4">المحاولة : 1 2 3 4<br>العلامة : ...... ...... ...... ......</td></tr>
<tr><td colspan="6">كل بند أو مفردة يقيم بـ 10 نقاط<br>الحد الأدنى: ما يعادل 80% من مجموع النقاط. الحد الأعلى: ما يعادل 100% من مجموع النقاط.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">م</td><td rowspan="2">بنود التقييم</td><td colspan="4">النقاط ( حسب رقم المحاولات )</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>1</td><td>تعريف الاشكال الهندسية المستوية (الأشكال الرباعية-المثلث-الدائرة)</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>حساب المساحة والمحيط للأشكال الهندسية المستوية.</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>تمييز اشكال الهندسة الفراغية (المكعب-الأسطوانة -البيضاوي-المخروط)</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>حساب المساحة والحجم للأشكال الهندسية الفراغية</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>تمييز الأشكال الهندسية من الأشكال الفراغية</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>تمييز العمليات الأولية عند العمليات الحسابية</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">المجموع</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="6">ملحوظات:<br>.............................................................................................................................<br>....................<br>توقيع المدرب: ..............................</td></tr>
</table>

# المراجــع

| م | المرجع |
|---|---|

| | |
|---|---|
| Precalculus 7th Edition by Raymond Barnett Michael Ziegler , Karl Byleen , David Sobecki | 1 |
| Abstract Algebra An Inquiry Based Approach, Jonathan k. Hodge, Taylor & Francis Group, 1St Edition, 21 December 2013 | 2 |
| Basic Engineering Mathematics 5th Edition. JOHN BIRD | 3 |
| Essential Mathematics for Engineers, W.J.R.H Pooler, 1St Edition, 2011, Bookboon, | 4 |
| الجبر ، الأستاذ دكتور عادل نسيم أديب، دار النشر للجامعات | 5 |
| أساسيات الرياضيات ، حسين رجب محمد، دار الفجر للنشر والتوزيع | 6 |
| مبادئ الرياضيات وتطبيقاتها في العلوم الإدارية والانسانية | 7 |